4°. ~~75, 835.~~

18. saec.

5J.–

BURNDY LIBRARY
Chartered in 1941

GIFT OF
BERN DIBNER

523010

MS.44

GEOMETRIÆ RUDIMENTA IN GRATIAM EORUM QUI PHILOSOPHIÆ OPERAM SUNT DATURI.

727.

Rudimenta

K K

Geometriæ Rudimenta in gratiam eorum, qui Philosophiæ operam sunt daturi

Philosophicarum Institutionum, tam in veterum, quam in Recentiorum Sententiis, notitiam scire cupientibus non solum perutilis sed et omnino necess.ª aliqualis Elementorum Geometricorum compendiosa instructio esse videtur. Sine enim qualicunque Geometriæ notitia maxima Physicæ pars in abdito latet; nec ullo mentis conatu potest e profundissimis tenebris, quibus immersa est in lucem educi. Idcirco Plato, veteresque Philosophi tali modo putarunt eam esse adhibendam, ut sine ipsa penitus arbitrabantur posse addisci Scientiam naturalis. Hinc Academiæ foribus hæc verba olim insculpta legebantur: nullus Geometriæ expers intrato. Et merito, nam nulla est Philosophiæ pars, in qua perfectior justæ ratiocinationis forma exibeatur quam in Geometriæ elementis. Quod jure factum hæc duo argumenta demonstrant.

Primum quia Philosophiæ studium varias mentis exigit dispositiones: ut Claritatem Perspicaciam Attentionem intelligendi Promptitudinem, Ratiocinandi Methodum, et similia, quæ omnia sunt potissime effectus, qui a Geometria percipiuntur, ut quotidiana experientia comprobat, et Sapientum docet authoritas. Plato enim lib. 2 de Rep. inquit: eos qui in re geometrica sunt versati, cæteris velociores, aptiores, atque promptiores esse ad omnes disciplinas. Et Quintilianus lib. 1. cap. 1 docet: Geometriam esse utilem teneris ætatibus agitari animos atque acui ingenia, et celeritatem percipiendi inde venire. Ex quo patet non solum Philosophiæ, sed et cujuscunque disciplinæ studio Geometriam esse præponendam; sine qua nec Oratorem esse posse, monet idem Quintilianus loco citato.

Secundum argumentum est: quod præcipuam Philosophiæ partem, quæ Physica dicitur, seu Scientia naturalis, cujus munus est naturæ arcana explicare impossibile sit sine Geometricis prænotionibus addiscere. Nam Deus naturæ Author omnia fecit in Numero, Pondere, et Mensura, nempe ita disposuit partes Universi,

ut invicem operentur secundum leges Mathematicas. Quare interrogatus Plato, quid in Coelorum sede faceret Deus? Respondisse tradunt: geometrizat. Imo et Aristoteles ipse summus tum Philosophus, tum Geometra ita conjunxit suam Physicam doctrinam cum sublimiori Geometria, ut nequeat ad quis intelligere, nisi prius Geometriae rudimentis fuerit imbutus. Idcirco non novum documentum sed satis antiquum, et non peculiare solius Cartesianae Philosophiae, sed cujuscunque sectae commune proposuit Cartesius, cum doctrinae suae monuit praediscendam esse Geometriam; ita ut voluit suum discipulum esse aut Geometram, aut Geometriae saltem hac mentem aptam, et assuetam.

His igitur, aliisque rationibus, quas brevitatis causam ommittuntur serio perpensis nemo quidem inficias ibit, Geometriam non modo utilem, sed et necessariam esse maxime iis, qui Philosophiae arcana introspicere cupiunt; imo, et ut vacui capitis Hominum os occludatur, qui utpote hujus scientiae ignari, ipsam aspernantur, ejus studiosos juvenes irrident illo dicto satis insulso: numquid pro Philosopho Caementarius, aut Agrimensor futurus.

Verum nil tam frequentius, ac deplorabilius cernitur, quam quod juvenes ad Geometriae nomen quasi deterriti, ejus studium tanquam asperum, improbum, atque prorsus injucundum abhorrent, et si plerique sint, qui cupido animo illam aggrediuntur, primo, aut secundo elementorum libro excurso taedio affecti, desertores plerumque fiant ita ut vix unus, aut alter ad sextum librum audiendum perveniat: unde fit ex sexcentis Adolescentibus qui Philosophiae operam dant, fere nullus Philosophus evadat. Imo post studiorum cursum plurimi confusiores, ac rudiores reperiuntur,

DSI

MSS 231 B
RB NMAH

etiamsi audierint Recentiorum Philosophiam, quæ quidem Menti ingerit quandam claritatem.

Nil mirum tamen Adolescentes tam in suave Geometriæ studium experiri; cum enim eorum Mentes juventutis calore hac illac freno impatientes rapiantur, et per diversa scientiarum, variaque objecta discurrere, ac spatiari aveant semper novitatis cupidæ, semperque ad ratiocinandum, et disputandum pro arbitrio paratæ, ægre quidem ferunt compedes, ac cancellos, quibus a Geometria se obstrictos sentiunt, quæ unum objectum contemplatur, nudam veritatem inquirit, demonstrationem rigorosam exigit, acutam denique Mentis aciem, seriumque laborem expostulat.

Nos igitur, ne ex una parte Tyrones nostros Geometriæ lumine, ejusque utilitate fraudatos relinquamus; et ex alia, ne integro ipsius cursu nimium eos gravemus, recte factum putamus, hæc brevia congerere Rudimenta, quibus resecatis iis, quæ ipsorum animos lassare, aut fastidire possent, prima Geometriæ principia addiscant, easque potissimum notiones, quæ scitu dignæ, ac necessariæ iis profecto sunt, ut in Physices penetralia pedem inferant. Fortasse his jactis fundamentis excitabitur studiosæ juventutis desiderium Geometriæ altiora prehendi, quo fructus uberiores in Philosophiæ segete colligere possint.

De Nomine, Essentia, et Partibus Geometriæ.

Geometria juxta nominis Etymologiam, aliud non sonat, nisi terræ mensurationem, vel ipsam scientiam dimetiendi terram, a græca voce Gea, quæ terram et verbo Metreo, quod metior significat. Et licet hæc ars non tantum in terra dimetienda usum habeat, sed etiam in aquis, in supramondanis intervallis, ipsisque

corporibus celestibus; tali non tamen prebuit causas, quae ex terre commensuratione cepit originem, ait Varo ad 3 Tit. quodam scilicet tempore quo Nilus quo crescens possessionum confundebat terminos; ad quos inveniendos adhibiti fuerunt Philosophi qui lineis agros dividebant; unde apud Grecos summo in honore hec scientia habita fuit. Cicero pr. Tusculane cap. 2.

Quoad propriam vero ejusdem Geometrie essentiam et rationem, ipsa significat mensurationem omnis Quantitatis seu extensionis; quae deinceps appellatur etiam Mathematica a greca voce Mathesis, quae, quamvis aliquando sumatur pro arte divinandi, qua utuntur Genethliaci, seu Astrologi vel Caldei, aut Horoscopi, vulgo dicta Astrologia giudiziaria, uti sunt illi, qui ex observantia hore natalis fata alicujus se scire profitentur, qua propter ratione isti Impostores ob obscuritatem artis reconditae, et subtilis in qua versantur, & Mathesin, seu abusum vocantur Mathematici.

Hic tamen Mathesis proprie sumitur pro illa disciplina, quae circa Quantitatem versatur, seu pro scientia contemplante corpus, prout mensurabile est. At sicuti Quantitas potest diversimode accipi, sic etiam et ipsa Mathesis diversa sortitur nomina. Nam si Quantitas fuerit discreta, videlicet nullo termino communi copulata ad faciendum unum: uti sunt Numeri, Oratio et tunc ipsa Mathesis, quae istam speciem Quantitatis considerat Arithmetica vocatur, seu Algebra, quae differt ab Arithmetica in hoc, quod Algebra utitur literis alfabeti ad designandas Quantitates; Arithmetica vero utitur notis, seu cifris. Si vero Quantitas fuerit Continua, idest habeat partes communi termino copulatas, etiam ipsa Quantitas potest esse duplex, Successiva scilicet, et Permanens. Successiva est illa, quae licet omnes ejus partes copulate sint termino communi, non tamen existunt omnes in eodem tempore,

et in actu, sed una succedit alteri; uti est Tempus Motus etc; Mathesis, seu mensura hujus Quantitatis dicitur Duratio, et de hac Quantitate nō loquimur in presenti. Vel eandem ipsa Quantitas Continua erit Permanens scilicet quod licet omnes ejus partes tnō sint copulatas, et omnes eodem tempore actu permanentes, et que proprie concurrunt ad constituendā Magnitudinem vive Extensionem: uti est linea, vel Superficies etc, et ipsa Mathesis, seu Scientia, quę sistit in contemplatione talis rei mensurande generice sumpta vocatur Geometria; specifice vero considerata variat sua nomina sdum diversa principia, quibus applicatur. Nam si describit vel mensuratur Mundū, seu Spheram Celestem appellatur Cosmographia, vel Terram, et dicitur Geographia, vel Aquam et dicitur Hydrographia; vel Ignem, et nuncupatur Pyrographia; vel aliquem particularē locum limitatur, et obtinet nomen Topographia. Si Astrorū cursū, vel naturā considerat, Astrologia, seu Astronomia appellatur; si Numerorum modulationi, quę modū canendi demonstrat, applicatur dicitur Musica. Si tandē visus rationem dirigit Optica nuncupatur.

Ubi videre licet, quod precipuū munus, et Essentia Geometrię est scrutari ratiōem, et proprietates alicujus rei, quę suscipere potest magis, et minus, nempe Quantitatis, seu Magnitudinis, et Extensionis; non autem cujuscumque, sed localis tantum, ex qua faciliss possunt aliq metiri.

Et etiā hoc sensu accepta Geometria potest duplicitur intelligi, vel ut Plana, vel ut Solida. Prima dicitur illa, quę contemplatur figuras lineis tantū exaratas in aliqua superficie: ut esset vgr. Circulus, vel Triangulū in aliquo Plano efformatum. Illa vero est illa, que versatur circa figuras 3na dimensionē contentas, videlicet longitudine latitudine, et profunditate, quod proprie est corpus. Et de hac non loquimur hic, sed tantū de Plana, quantum ad nostrā propositū spectat.

Et quoniam etiam hæc Scientia, sicut unaquæque alia, utitur quibusdam vocabulis sibi propriis, ideo pro majori claritate illa explicabimus.

Explicantur quædam vocabula, quorum usus est in Geometria frequens.

Principia, seu suppositiones Geometriæ ex quibus deducuntur omnes quæ geometrice in tria genera dividuntur, scilicet in Definitiones, Postulata, et Axiomata.

Definitio est Oratio quæ continet explicationem alicujus rei, seu propositio, quæ explicat, quid sit aliqua res, definitio appellatur: ut cum aliquis ait: nomine Trianguli nihil aliud intelligere, nisi figuram tribus lineis contentam.

Postulatum est Propositio, quæ præcipit faciendum id, quod fieri non repugnat, imo est tam facile ad posse fieri, quod non indiget regulis, ut fiat ex eo quia ob summam facilitatem postulatur a Geometris, ut tanquam factum concedatur: ut esset hoc v.g.r.: a quovis puncto ad quodvis punctum lineam duci rectam.

Axioma est Propositio, quæ est tantum sententia per se manifesta; quia tam clare, et distincte continet veritatem, ut non indiget probatione, ad hoc ut possit intelligi: ut est hæc: Totum est majus sua parte.

Deinde Propositionum aliæ vocantur Problemata, aliæ Theoremata, aliæ Lemmata, aliæ Corollaria, aliæ Scholion, aliæ tandem Conversæ, dum diversum munus, quod exercent. Sic

Problema est propositio, quae praecipit quoddam faciendum tamen difficile, quod absque regulis non potest fieri; v.g.: lineam perpendicularem erigere in alia linea ad punctum datum in ea.

Theorema est propositio, quae continet quandam veritatem, sed non tam perspicuam quod mentis intuitu et sufficienti attentione intelligibilem; sed indiget probatione et contemplatione: ut cum quis diceret: Anguli opponuntur esse aequales ad verticem oppositi.

Lemma est propositio tantum accepta, ut per eam possit demonstrari quoddam Theorema, vel Problema: ut est v.g. Thema, aut Assumptio in argumentatione; sive ut est Titulus, qui paucis verbis praefigi solet in aliquo opere, ut indiget totum id, de quo in opere disseritur.

Corollarium est propositio continens veritatem, quae necessario eruitur, sive consequitur ex alia antecedenti propositione.

Scholium est breve commentum, seu scriptum, sive interpretatio, sive quaedam exercitatio in aliquam propositionem, ut talis propositio, vel magis explicetur, vel amplius declaretur ipsius usus, et utilitas.

Conversae propositiones dicuntur illae, quarum una ex aliquo posito aliud deducit: altera vero ex eo, quod in priore deductum erat posito, quod in ipsa praemissum fuerat, concludit; ut si dicat: Triangulum istud est Isosceles: ergo angulos habet ad basim aequales: vicissim diceres possem: Triangulum istud habet angulos ad basim aequales: ergo est Isosceles.

Cum autem Postulata et Axiomata sint pari jure communia omnibus deinceps agendis, ratio, et doctrinae ordo praecipit, ut ea hoc loco praemittantur

Postulata

Primum. A quovis puncto ad quodvis punctum linea ducitur recta.

2dum. Linea recta terminata protendi in directum, et continuari.

Tertiū. Circulus describitur a quovis centro ad quodvis intervallum.

Axiomata

Sequentes sunt quasdam clarissimas Quantitatis proprietates explicant.

Axioma Imum. Totum est majus sua parte: et aequale est omnibus suis partibus simul sumptis

2. Quae eidem sunt aequalia, ea quoque sunt aequalia inter se; seu: quia si duae Quantitates sint alicui tertiae aequales, erunt et inter se aequales 5 $\frac{5}{}$ 5. Hinc sequitur, quod uno aequalium est majus, aut minus, altero quoque est majus, aut minus: videlicet, si duarum Quantitatum aequalium una sit major, vel minor tertia, altera etiā erit ac major, vel minor 10 $\frac{5}{}$ 10 = 7 $\frac{10}{}$ 7.
3. Si aequalibus aequalia addantur, tota erunt aequalia. 5 - 5 = 5 - 5.
4. Si ab aequalibus aequalia demas, quae remanebunt erunt aequalia. 10 - 10 = 3 - 3.
5. Si inaequalibus addas aequalia, tota erunt inaequalia; remanentes majores (scilicet Quantitates), quae fuerunt majores, et minores, quae fuerunt minores. 5 - 9 = 4 - 4.
6. Si ab inaequalibus tollantur aequalia, quae remanent erunt inaequalia; et majores remanent, quae majores erant; minores, quae erant minores. $\frac{10}{5} - \frac{15}{5}$.
7. Quae ejusdem sunt dimidia, ea inter se sunt aequalia. Similiter, quae ejusdem sunt dupla, vel tripla, vel quatrupla, inter se sunt aequalia. 16 $\frac{8}{8}$ 16 24 $\frac{8}{}$ 24
8. Quae mutuo sibi congruunt sunt aequalia. Ita vero dicuntur congruere, quae simul composita sic conveniunt, ut extrema unius cadant in extrema alterius, nec excedant, nec excedantur: ut si Linea pedalis applicetur lineae pedali, cuncta extrema unius cadant in extrema alterius, et ambae faciunt unam lineam.

9. Duae Lineae non inclinantur mutuo ad se, quod una earum non magis, quam altera inclinatur ad aliquam tertiam versus eandem partem. v.gr: si lineae LD, et IH. Fig. 12. tab. 1. aequaliter inclinentur ad rectam BH. versus eandem partem, erunt paralelae.

10. Si duae Quantitates sint aequales duabus aequalibus, erunt inter se aequales. 8—8.

Nota, quod quidquid Geometra sibi faciendum, aut explicandum proponit, Problema appellat.

Caput – I, sive Liber I.

De Lineis, et Angulis.

Definitiones.

1. Magnitudo significat omne id, per quod aliqua res collata cum altera ejusdem generis, dicitur ei aequalis, aut inaequalis. adeoque comprehendit extensionem localem, numerum, motum, ac Tempus. Geometrae vero ex his magnitudinibus potissimum extensionem localem considerant, quod ex ea facile sit ceteras metiri.

2. Extensio autem localis, aut Quantitas molis, est certus, ac definitus modus magnitudinis; nempe id quod respondetur quaerenti: Quanta sit Moles rei. Et ipsa Quantitas, vel spectatur tantum in longum, et dicitur **Linea**: vel in longum, et latum, et vocatur **Superficies**: vel denique in longum, latum, et profundum, et nuncupatur **Solidum**.

3. Termini Lineae, dicuntur puncta. Punctum autem apud Euclidem est id, cujus nulla est pars: sive potius est id, quod concipitur quasi nullas habere partes, licet reipsa illas habeat. Quaecunque enim pars corporis designatur, Punctum appellatur: et quia cum partem corporis designamus, nihil opus est cogitare, an sit extensa, vel divisibilis, ideo Punctum tanquam inextensum, et indivisibile concipimus; non quia ita sit, sed quia cum illud designamus, tantum ut designabile, non ut extensum, vel ut divisibile concipimus.

4. Linea alia est recta, quæ inter sua puncta extrema æqualiter procenditur: ut AB. Fig. 1. tab. 1. Concipi potest Linea orta ex fluxu puncti vestigium suiipsius in fluendo relinquens. Alia est curva, et est illa, quæ a recto tramite deflectit: ut C.D. Fig. 2. tab. 1. Item Superficies alia est plana, et est illa, cui quoquoversus potest accomodari Linea recta: ut est Superficies v.gr. Tabulæ marmoreæ; vel est curva; ut est Superficies Globi.

5. Si duæ, aut plures Lineæ sint contentæ iisdem terminis; illa, quæ est recta, est brevissima: ut C.B. Fig. 3 tab. 1. ex curvis vero, quæ continent alias, ipsæ sunt majores contentis: ut C.d.B. est major, quam C.e.B. Quod tunc tamen solum verum est, quando ipsæ Lineæ curvæ sunt incurvatæ, seu excavatæ, sive extensæ in eandem partem; si enim, quæ continetur, sit inflexa in diversas partes, et efficiat varios anfractus, tum ea poterit esse major, quam alia, quæ continetur: ut C.f.B major est quam C.A.B.

6. Si duæ Lineæ æqualiter ubique distent a se mutuo, seu protractæ in infinitum nunquam concurrant, aut ad sese invicem non inclinentur, dicuntur parallelæ, ut AB, et CD, fig. 4. tab. 1.

7. Si duæ Lineæ concurrant in unum punctum, cætera distractæ, et divergentes, distractionis hujus, et divortii Quantitas dicitur Angulus; ut BAC fig. 5. tab. 1. Punctum vero, in quo concurrunt Lineæ, appellatur Vertex Anguli, ut A. Etenim quoniam Angulus tribus literis exprimi solet, quarum media punctum concursus, seu Verticem Anguli denotat.

Notandum autem Quantitatem Anguli non æstimari ex Longitudine Linearum constituentium Angulum, sed ex earum distractione. Nam Angulus DEF fig. 6. tab 1. est major Angulo GHI, fig. 7. tab. 1. tametsi minoribus Lineis contineatur. Si enim Angulus GHI imponatur Angulo DEF punctis notato, facile quivis intelliget, Angulum GHI esse

comprehensum Angulo **DEF**, et Lineas continentes Angulum **DEF** multo magis distractas esse, quam eas, quae comprehendunt Angulum **GHI**.

8. Anguli, quos faciunt Lineae in Superficie, dicuntur Superficiales; ac si ea Superficies sit plana, vocantur plani; si Spherica, Spherici: sed de Sphericis non agimus.

9. Planus Angulus, si fiat ex duabus rectis Lineis, dicitur Rectilineus; cujusmodi sunt Anguli figurarum 5. 6. 7. tab. 1. Si fiat ex Curvis, Curvilineus vocatur, ut **LMN** fig. 8. tab. 1. Si ex Recta, et Curva, Mixtilineus nuncupatur, ut **OPQ**. fig. 9 tab. 1.

10. Angulus quilibet vel Rectus est, vel Obtusus, vel Acutus.

11. Angulus Rectus est is, qui alteri ex altera parte habet aequalem, si unum latus produxerit: ut Angulus **BEA** fig. 10. tab. 1. est Rectus, si ei ex altera parte aequalis effici possit **AEC** producto latere **BE** in **C**. Hinc colige, omnes Angulos rectos esse inter se aequales.

12. Cum igitur Recta **AE** fig. 10 tab. 1. super Recta **BEC** consistens in neutram partem inclinatur, ac proinde Angulos utrinque facit aequales, ambo est Anguli **AEB**, et **AEC** recti sunt. Recta autem **AE** alteri insistens, dicitur Perpendicularis.

13. Anguli, qui unum latus commune habent, quique ex utraque parte ipsius lateris fiunt, dici solent Deinceps positi: ut fig. 10. tab. 1. **AEB**, et **BED**. Quod si producatur **BE** in **C**, ut **AE** in **D** productum est, Anguli BEA, et DEC dicuntur ad verticem oppositi.

14. Angulus Obtusus est ille, qui Recto est major: talis est Angulus CDC fig. 11. tab. 1.

15. Angulus vero Acutus est ille, qui minor est Recto; talis est in eadem figura CDB. Hinc colige Angulos Obtusos posse esse alios majores, vel minores, nec secus ac Angulos Acutos.

16. Si Rectalinea, ut CE, in duas rectas lineas quascunque incidat, plures Angulos facit, ut fig. 12 tab. 1. Anguli A, B, F, H, Externi dicuntur; C, D, E, G, Interni dicuntur; C, et E, vel D, et G, Interni ad eandem partem dicuntur. C, et G, itemque D, et E, dicuntur Alterni. Denique G, et B, vel E, et A dicuntur Internus, et Externus ex eadem parte oppositi.

Theorema I.

Recta Linea super aliam Rectam consistens, aut facit deinceps duos Angulos Rectos, aut aequales duobus rectis.

Nam si AD fig. 11. tab. 1. insistat perpendiculariter lineae CDB, erunt Anguli ADB, et ADC utrique recti per definitionem 11, et 12. Si vero ED oblique insistat eidem lineae CDB, concipiamus perpendicularem AD. Cum tunc Anguli EDB Acutus, et EDC Obtusus idem spatium occupant, ac duo recti ADB, et ADC et proinde iis congruant, erunt hi illis aequales per Axioma 8. Quod erat demonstrandum.

Corollaria.

1. Eodem modo demonstrabitur, si plures rectae lineae quam una eidem rectae ad idem punctum insistant, Angulos, qui per eas efficiuntur, simul duobus rectis esse aequales, eadem figura.
2. Duae rectae lineae sese mutuo secantes, ut AED, et BEC figura 10. tab. 1. efficiunt in intersectionis puncto quatuor Angulos aequales quatuor rectis.
3. Omnes Anguli circa unum punctum C consistentes, ut fig. 13. tab. 1. Aequales sunt quatuor rectis: sunt enim quatuor recti in plures partes secti.

Theorema II.

Anguli ad verticem oppositi sunt æqles
Nimirum Angulus B, Fig. 12. tab. 1. est æqlis angulo C; Quod ut demonstretur, uterq: debet cum Angulo intermedio A componi. Nam Angulus B, et Angulus A sunt æqles duobus rectis, per idem Theorema 1. g.o Anguli C et A simul sumpti æqles sunt Angulis B, et A simul sumptis; g.o ablato communi Angulo A, remanebunt Anguli B, et C æqles, per Axioma 4. Quod erat demonstrandum.

Theorema III.

Si recta linea OP duas rectas parallelas NL, et MI secuerit, Angulum internum faciet æqlem Angulo externo, ex eadem pte opposito.
Nam cum Lineæ LN, et IM Fig. 12. tab. 1. sint parallelæ, æqliter inclinantur ad lineam OP versus easdem ptes, per definitionem sextam, et Axioma nonum. g.o Anguli B, et B, vel A, et C qui fiunt per inclinationem linearum LN, et IM ad lineam OP, sunt æqles.

Theorema IV.

Anguli alterni sunt inter se æqles.
Nam Angulus B Fig. 12. tab. 1. æqlis est Angulo C sibi ad verticem oppto, per Theorema 2dum. Sed idem Angulus B æqlis est Angulo B per Theorema 3. g.o Angulus C æqlis est Angulo B alterno, per Axioma 2.

Theorema V.

Si Linea recta duas parallelas secuerit, Angulos internos ad easdem ptes faciet duobus rectis æqles.
Nimirum Anguli alterni C, et B Fig. 12. tab. 1. sunt inter se æqles, per Theorema 4. Atqui Anguli

G, et B deinceps positi sunt aequales duobus rectis, per Theorema 1. ergo Anguli B, et A sunt aequales duobus rectis. Quod erat demonstrandum.

Scholium

Quae conversae locum habent in tribus praecedentibus Theorematis.

Nam si duae lineae LN, et IM fig. 12. tab. 1. cum tertia OP efficiant aequales Angulos B, et A, externum, et internum ex eadem parte oppositos, aequaliter ad illam lineam OP inclinabuntur: unde erunt parallelae per Axioma 9.

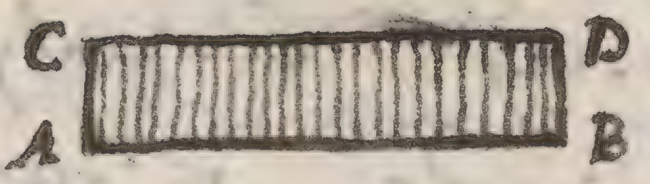
Similiter ex eo, quod Anguli alterni G, et A sint aequales, sequitur lineas LN, et IM esse parallelas. Cum enim Anguli ad verticem oppositi B, et G sint aequales, et sit G aequalis ipsi A: erit Angulus B Angulo A, externus interno aequalis: adeoque per demonstrationem praecedentem, lineae LN, et IM erunt parallelae.

Denique si Anguli D, et A interni ad eandem partem sint aequales duobus rectis, erunt similiter lineae LN, et IM parallelae. Nam Anguli B, et D deinceps positi sunt aequales duobus rectis, per Theorema primum. Sed Anguli D, et A ponuntur etiam aequales duobus rectis. ergo Anguli B, et A externus, et internus sunt inter se aequales: adeoque ex modo demonstratis lineae LN, et IM sunt parallelae.

Corollaria ad Caput 1.

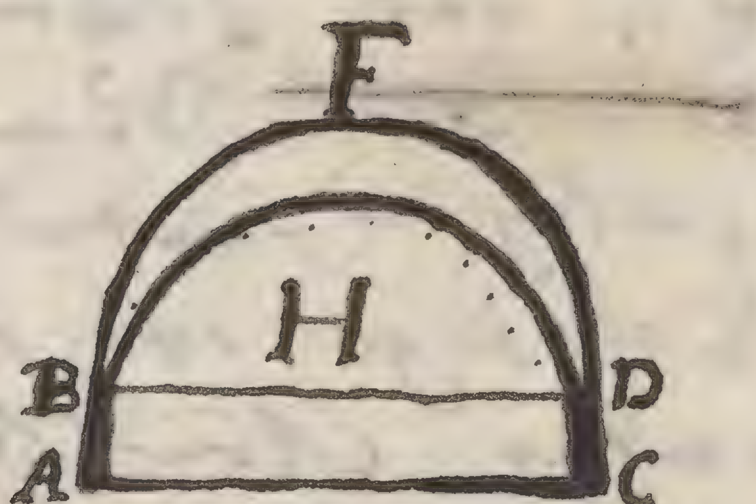
1. Sequitur quod extrema Linearum esse puncta, Lineasque ex punctis esse conflatas.
2. Inter duo puncta una tantum recta linea duci potest: Nam unica tantum esse potest omnium brevissima. Possunt vero duci curvae infinitae inter eadem puncta, unae aliis longiores.

3. Longitudo corporis considerata una cum latitudine sed nulla habita ratione profunditatis, Superficies appellatur; quae concipi potest orta ex fluxu lineae in transversum excurrentis, et in excursu vestigium suiipsius relinquentis; seu ut aggregatum tot linearum, quarum una sit posita iuxta aliam, ut A,B,D,C.



4. Ex quo sequitur extrema Superficiei esse lineas, ut A B, C D. vel A C, B D.

5. Si inter extrema A, B, C, D, ductae sint plures superficies, quae brevissima omnium erit, dicatur recta, seu plana. caeterae appellentur curvae; Plana itaque erit A B D C. Curva erit B F D, cujus pars exterior B F D dicatur Convexa: interior vero A H C appelletur Concava, ut patet in sequenti figura.



Caput II. sive Liber II.

De Triangulis, Quadrilateris, Pentagonis, Exagonis, et Reliquis Polygonis.

Definitiones.

1. Figura est spatium undique coclusum. Unde Angulus non est Figura: quia non circumquaque clauditur. Hinc etiam duae lineae rectae non constituunt figuram; quia spatium non comprehendunt. ad hoc enim opus est tribus saltem lineis.

2. Ex figuris aliae sunt planae, aliae solidae. De solidis, quae sunt illae scilicet quae significant corpus constans trina dimensione, videlicet longitudine, latitudine, et profunditate, non agimus hic, sed solum de Planis, et dicimus, quod

3. Planæ figuræ sunt illæ, quæ continentur in aliqua superficie lineis exaratis, quæ lineæ si rectæ sint, figuram vocatur rectilineam: si curvæ, curvilineam: si partim rectæ, partim curvæ, vocatur mixtam, seu mixtilineam.

4. Lineæ illæ, quibus figura terminatur, simul sumptæ dicuntur ipsius Circumferentia, aut Circuitus, aut Perimeter. Unde figuræ quæ æqualem habent ambitum, uno nomine vocantur Isoperimetræ.

5. Ex omnibus figuris curvilineis, et mixtis præcipue a Geometris spectatur Circulus, aut portio Circuli. De Circulo dicemus capite sequenti:

6. Inter rectilineas maxime simplex est Triangulum, quippe, quod tribus tantum lineis totidemque Angulos efficientibus continetur.

7. Triangulum autem, vel secundum Angulos dividitur, vel secundum latera. Si secundum Angulos: vel habet unum ex suis angulis rectum, et dicitur rectangulum, ut ABC fig. 14. tab. 2: vel unum habet Obtusum, et vocatur Amblygonium, ut DEF fig. 15. tab. 2: vel omnes habet Acutos, et appellatur Oxygonium, ut GHI, vel KML, fig. 16, et 17 tab. 2.

8. Id si secundum latera dividatur, ac tria latera habeat inæqualia, dicitur Scalenum, ut ABC fig. 14. tab 2. Si duo latera æqualia tantum habeat, vocatur Isosceles, ut KML fig. 17. tab. 2. Si omnia habeat æqualia, Æquilaterum nuncupatur, ut GHI. fig. 16. tab 2.

9. Si duo Trianguli latera sumantur, appellari possunt Crura, et tunc tertium dicitur Basis. Quodlibet latus sumi potest pro Basi. In Triangulo tamen rectangulo, vel Amblygonio maximum latus, quod scilicet Angulo recto, aut Obtuso opponitur, appellari solet Basis, vel etiam Hypotenusa, ubi agitur de Triangulo

rectangulo. In Triangulo quoque Isoscele latus inaequale dicitur Basis.

10. Triangulares Figuras sequitur Quadrilaterum, quod quatuor Lineis rectis, totidemque Angulis comprehenditur.

11. Quadrilaterum, si opposita latera parallela habeat, Parallelogrammum dicitur, ut ABCD fig. 18. tab. 2. Aliqui Trapezium vocatur, ut EFGH fig. 19. tab. 2.

12. Parallelogrammum, si quatuor Angulos rectos habet, dicitur simpliciter Rectangulum, ut IKLM fig. 20. tab. 2.

13. Si omnia Rectanguli latera aequalia sint, dicitur Quadratum ut CDEF, fig. 21. tab. 2. Si opposita tantum aequalia, vocatur Altera parte longius, ut IKLM fig. 20 tab. 2.

14. Si quatuor Anguli Parallelogrammi non sunt recti: tum vel omnia latera habet aequalia, et dicitur Rhombus, ut FHIK fig. 22. tab. 2: vel tantum opposita aequalia, ut ABCD fig. 23. tab. 2., et vocatur Rhomboides.

15. Porro Parallelogrammum notatur literis quatuor ad quatuor angulos appositis, ut ABCD fig. 23. tab. 2: interdum etiam compendii causa literis duabus ad diametrum appositis, ut BC. Est autem Diameter, seu Linea Diagonalis, ea, quae ab uno Angulo Quadrilateri ad oppositum ducta est, ut BC.

16. Si per Assumptum in diagonali BC, fig. 23. tab. 2. Punctum I ducantur binae rectae lineae EF, GH lateribus parallelae, dividetur totum Parallelogrammum in quatuor Parallelogramma, quorum duo EG, HF dicuntur Parallelogramma circa Diametrum, duo vero reliqua AI, ID vocantur Complementa.

17. Si Figura plus habeat, quam quatuor Angulos, et plura quam quatuor latera, Polygonum dicitur, si sex habeat latera, Hexagonum; si septem, Heptagonum, etc.

Theorema I.

In omni Triangulo externus angulus æqualis est duobus internis oppositis: et tres ejus Anguli æquales sunt duobus rectis.

Sit Triangulum ABC fig. 24 tab 1, cujus latus BC producatur in D. Dico ergo, Angulum externum ACD æqualem esse duobus internis oppositis, A, B: Nec non, tres Angulos A, et B, et ACB æquales esse duobus Angulis rectis.

Demonstratio primæ partis. Ducatur Linea CE parallela ipsi BA: cumque recta AC incidat in Parallelas AB et CE. ergo Angulus A, sive BAC æqualis erit alterno ACE, per Theorema 4.m capitis primi. Item recta BC incidit in Parallelas BA, et CE. ergo Angulus B internus æqualis est externo ECD, per Theorema 3.m capitis 1. ergo duo A, et B sunt æquales duobus ACE, et ECD, hoc est toti ACD.

Demonstratio 2dæ partis. Duo Anguli A, et B sunt æquales Angulo ACD. ergo addito communi ACB, tres Anguli A, et B, et ACB sunt æquales duobus ACD, et ACB, per Axioma 3.m. Atqui ACD, et ACB deinceps positi æquales sunt duobus rectis per Theorema primum primi capitis. ergo tres A, et B, et ACB sunt æquales duobus angulis rectis, per Axioma 2.m

Monitum.

Hujus eximiæ proprietatis Auctor dicitur Pythagoras et quoniam continuus pene est illius usus in Geometria, ideo accurate debet teneri, et puramus subjungendam aliam rationem hujus Demonstrationis. Quæ quibusdam Adolescentibus visa est facilior.

Sit Triangulum ABC Fig. 25. tab. 1. dico p.º tres Angulos A, et C, et B esse duobus angulis rectis aequales. Etenim ducatur Linea CD Parallela lateri AB, certum est Angulos c, et b adjacentes angulo A, junctos simul cum illo angulo A aequales esse duobus angulis rectis per Corollarium primum Theorematis primi capitis primi. Sed Angulus c aequalis est Angulo C, et Angulus b aequalis est angulo B alterno, per Theorema 4.m capitis primi. Ergo pariter anguli C, et B juncti angulo A aequales sunt duobus angulis rectis, per Axioma 3.m

Dico 2do, Angulum externum d aequalem esse duobus internis A, et C ipsi oppositis. Nam Angulus d externus, et B internus simul sumpti aequales sunt duobus rectis per Theorema 2.m capitis primi; Atqui Angulus A, et C simul cum angulo B aequales itidem sunt duobus angulis rectis per demonstrationem praecedentem. Ergo Angulus d externus aequalis est duobus internis A, et C oppositis, per Axioma 3.m

Corollaria.

1. Tres Anguli simul sumpti cujusvis Trianguli aequales sunt tribus angulis simul sumptis cujuscumque alterius Trianguli: nam utrique pares sunt duobus rectis.
2. Omne Triangulum duos necessario postulat acutos angulos. Nam si unicum haberet acutum, duo reliqui vel recti essent, vel obtusi, quod dici non potest; cum tres simul anguli Trianguli duobus tantum rectis aequivaleant.
3. Quoties in uno Triangulo duo anguli, aut singuli, aut simul aequales erunt duobus angulis, aut singulis, aut simul in altero Triangulo, etiam tertius tertio aequalis erit.

Theorema 11.

In omni Triangulo Angulus major est, qui majori lateri opponitur, et vicissim.

Nimirum Angulus C Fig. 15. tab. 1, qui opponitur majori lateri A B, major est, quam angulus A, vel angulus B. Etenim cum magnitudo anguli a linearum illum comprehendentium, distractione desumatur; cumque eo magis illae

Lineæ distrahantur, quo majus latus intercipiunt; clarum est, angulum C oppositum majori lateri esse majorem alterutro aliorum B, vel A. Item majori angulo majus vicissim latus opponitur ob eandem rationem.

Corollaria.

1. In triangulo æquilatero GHI fig. 16 tab. 2 tres anguli sunt inter se æquales: quia æqualibus lateribus opponuntur. atque ita sunt omnes acuti. Nam non possunt esse omnes recti, aut obtusi, per Corollarium 2dum Theorematis 1mi hujus capitis.

2. In triangulo Isoscele KML fig. 13. tab. 2, anguli K, et L super basi KL consistentes, sunt æquales, quia æqualibus quoque lateribus opponuntur.

3. Perpendicularis AB fig. 26 tab. 2. est brevissima omnium linearum, quæ ex puncto A ad rectam lineam BC duci possint. Cum enim angulus B rectus sit, necesse est per Corollarium 2dum Theorematis 1. hujus capitis, angulum ACB esse acutum. ergo AB minor est, quam quælibet linea AC, per præsens Theorema.

4. Ex uno puncto ad unam rectam lineam una tantum duci potest perpendicularis. Id patet ex Corollario præcedenti. Iam diximus, quod duobus modis linea recta occurrit lineæ rectæ; vel ita ut magis non inclinet versus unam partem, quam versus aliam, et tunc recta linea occurrens dicatur perpendicularis, ut linea AD fig. 11 tab. 2, quæ ita occurrit lineæ CB, ut non inclinet magis versus C, quam versus B. Vel plus inclinet versus unam partem, quam versus aliam, et tunc dicatur obliqua, ut CD. Patet ergo unicam tantum perpendicularem esse posse ad eandem partem supra idem punctum lineæ rectæ. Nam si supra punctum D cadat ex eadem parte alia linea diversa a perpendiculari AD, linea illa, ut ED plus inclinabit versus unam extremitatem B, quam versus aliam C.

Theorema III.

Si duorum triangulorum latus unum uni, et alterum alteri sit æquale; ac præterea anguli iisdem lateribus contenti etiam sint æquales, æquabuntur quoque et bases, et tota triangula.

Nam si intelligamus triangulum D, E, F fig. 28 tab. 1, triangulo B A C fig. 22 superponi, angulus E congruet cum angulo A sibi æquali, ac latera E D, et E F æqualibus lateribus A B, et A C convenient: adeo ut tria puncta D, E, F cadant supra tria puncta B A C. ergo basis D F tota cadet supra totam basim B C; sed et anguli D, et B; itemque F, et C, totaque triangula sibi mutuo tunc congruent. Omnia igitur per Axioma 8vum æqualia erunt; quod erat demonstrandum.

Corollaria.

1. Simili ratione, nempe ex eo quod duo triangula sibi mutuo congruant, si ipsa habuerint omnia latera sibi mutuo æqualia, etiam angulos omnes æqualibus lateribus oppositos habebunt æquales, et tota erunt inter se æqualia.
2. Item si in uno triangulo duo anguli seorsim sumpti æquales fuerint duobus seorsim angulis alterius trianguli; et unum latus æquale uni lateri alterius; reliqua omnia erunt æqualia: quia si unum triangulum alteri imponatur, ea sibi mutuo congruent.

Theorema IV.

In omni triangulo duo quælibet latera tertio sunt majora. Hæc propositio instar Axiomatis est Archimedi.

Nam, ut diximus definitione 8. capitis primi, linea recta est omnium linearum, quæ ab uno puncto ad aliud punctum ducuntur, brevissima: et proinde cum unum trianguli latus ab uno puncto ad aliud punctum recta linea ducatur, duo vero reliqua a recto tramite deflectant: necesse est duo quælibet latera omnis trianguli tertio esse majora.

Theorema V.

Parallelogrammorum opposita latera sunt æqualia, et Anguli, uti et partes per diametrum factæ.

Quoniam AB, et CD fig. 23 tab 2. sunt parallelæ per definitionem 11 hujus capitis, et in eas incidit linea recta BC, quæ est diameter seu linea diagonalis Parallelogrammi ABCD; Erunt anguli alterni ABC, et BCD, æquales per Theorema 4tum præcedentis capitis. Item, quia AC, et BD sunt parallelæ, in easque incidit linea recta BC: erunt alterni anguli ACB, et CBD æquales. ergo totus angulus ACD æqualis est toti angulo ABD.

Eodem modo ostendam angulos A, et D esse inter se æquales.

Jam vero, quia triangula ABC, et CDB unum latus BC commune habent, et angulos ipsi lateri adjacentes æquales; erunt etiam latera AC ipsi lateri BD, et AB ipsi CD æqualia; itemque ipsa triangula æqualia erunt, per Theorema 3. hujus capitis, et ejus Corollaria.

Corollaria.

1. Complementa AI, ID, fig. 23 tab 2., sunt etiam inter se æqualia. Nam duo triangula majora CBA, CBD sunt æqualia per præcedens Theorema. ex his igitur si subducantur æqualia triangula CIH, CIF, et IBE, IBG, reliqua spatia AI, ID, quæ sunt Parallelogrammi complementa, erunt æqualia.

2. Inter parallelas AB, CD, Fig. 18. tab. 1. lineae AC, et BD aequaliter ad eas inclinatae, sunt aequales. Idem dicendum de lineis IL, et KM, Fig. 20 tab 1, inter parallelas IK, et LM positis, et ad eas perpendicularibus. Fit enim utrobique Parallelogrammum, cujus ex hoc Theoremate opposita latera sunt aequalia.

Theorema VI.

Parallelogramma supra eadem basi et inter easdem parallelas constituta sunt aequalia.

Sint Parallelogramma AC, et AD, Fig. 30 tab 1. super eadem basi AB, et inter parallelas AB, et CD constituta: dico ea esse aequalia. Nam in triangulis ACF, et BED, latus AC aequale lateri BE per Theorema praecedens. Item cum lineae CE, et FD sint eidem AB aequales, per idem theorema, si utrique addatur pars communis EF, erit totum latus CF aequale lateri ED, in praedictis triangulis, per Axioma 3.um Sed ob parallelas AC, et BE, anguli ACF, et BED internus, et externus sunt aequales. ergo per Theorema 3.m praesentis capitis triangula ACF, et BED sunt aequalia. ergo si ab utroque detrahatur pars communis GEF, et addatur utrique pars communis ABG, erunt Parallelogramma CB, et AD aequalia: quod erat demonstrandum.

Corollaria.

1. Eadem demonstratio facile applicari potest Parallelogrammis super aequalibus basibus, et intra easdem parallelas consistentibus.
2. Triangula pariter, sive super eadem basi, sive super aequalibus basibus, et inter easdem parallelas constituta,

sunt æqualia. Nam Triangulum ACB, Fig. 31. tab. 2. est dimidium Parallelogrammi ABCD, sicut Triangulum AFB est dimidium Parallelogrammi ABFD per Theorema praecedens: hæc autem Parallelogramma AC, AD sunt æqualia per Præsens Theorema: adeoque Triangula sunt quoque æqualia, per Axioma 7m.

Explicatur magis primum Corollarium. Sint duo Parallelogramma CDAB, FDHI, eadem Fig. 30 quæ consistunt in eisdem parallelis CD, HI, habeant bases æquales AB, HI. Dico ipsa duo Parallelogramma inter se æqualia esse.

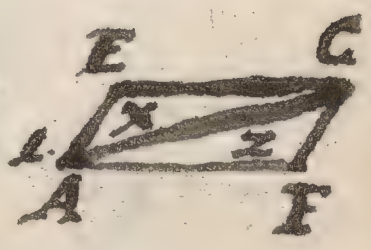
Ducantur enim rectæ AF, BD. Et quoniam AB, CD est parallelogrammum, erunt latera ejus opposita CD, AB inter se æqualia. Est autem ex hypothesi AB æqualis HI. Quare et CD, ipsi HI æqualis erit, ex Axioma 2. Cum igitur rectæ duæ AB, FD sint æquales et parallelæ, erunt etiam æquales et parallelæ AF, BD, quæ illas conjungunt ad easdem partes: et propterea ABDF parallelogrammum erit. Et quoniam parallelogramma duo CA, BD, ABDF, habent eandem basim AB et sunt in eisdem parallelis, erunt inter se æqualia, per præsens Theorema; pariterque quoniam Parallelogramma duo HIDF, ABDF, habent eandem basim FD, et sunt in eisdem parallelis, erunt ea inter se æqualia. Eidem igitur Parallelogrammo ABDF, æquale est tum Parallelogrammum AB DC, tum Parallelogrammum HIDF.

Quare erit Parallelogrammum ABCD, æquale Parallelogrammo EHID, per Axioma 2um et propterea parallelogramma in æqualibus basibus, et in iisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

Theorema VII.

Cujuscunque figuræ quadrilateræ omnes anguli simul sumpti quatuor rectis sunt æquales.

Demonstratio—



Nam sit quæcunque figura quadrilatera EACG, fig. 38. tab. 1. si ducatur diameter AC secabitur in duo triangula X, et Z; sed omnes anguli trianguli X, sunt duobus rectis æquales: et omnes anguli trianguli Z, sunt etiam duobus rectis æquales per Theorema 1um cap. 2; ergo omnes anguli figuræ quadrilateræ CAEG, sunt quatuor rectis æquales, quod erat demonstrandum. Nunc.

De Polygonis Figuris.

Definitio 1. Figura, quæ plura habet latera, quam quatuor, appellatur Polygonum, seu figura Multilatera, quamvis sæpe hoc nomen commune sit omnibus figuris rectilineis.

C. Quodcunque Polygonum suscipit ut diximus, nomen a numero laterum, si 5 habet latera, dicitur Pentagonum, si 6 Exagonum; si 7 Heptagonum, et ita Octagonum etc.

Axioma =

Quodcunque sit Polygonum, si in ejus Area (spatium inter lineas cujuscunque figurae comprehensum, dicitur Area trianguli quadrati &c.) sumatur quodlibet punctum X fig. 29 tab. 2 ex quo ad singulos angulos ducatur linea recta, Polygonum dividetur in tot triangula, quot sunt Polygoni latera. Ita Heptagonum BC DEFGH dividetur in septem triangula, quia septem habet latera.

Theorema VIII.

Omnes Anguli, quos latera cujuscunque Polygoni interne efficiunt, sunt aequales tot binariis angulorum rectorum, quot sunt Polygoni latera, demptis quatuor.

Demonstratio.

Haec demonstratio in quocunque Polygono potest iterari; ad tamen Heptagono BCDE FGH fig. eadem modo applicemus. Ostendemus itaque in Heptagono omnes esse decem rectis aequales. Nam in eo considerari possunt 7 triangula per Axioma praecedens, quorum unumquodque habet suos angulos duobus rectis aequales, per Theorema 2.m praesentis capitis, erunt omnes anguli horum septem triangulorum aequales 14.m rectis. Sed anguli omnes circa punctum X sunt 4.r rectis aequales, per Corollarium 2.m; ergo si a 14.m rectis, nempe a summa omnium angulorum rectorum, qui considerantur in Heptagono, demantur 4.r recti, reliqui erunt decem recti.

Quæcunque igitur sit figura rectilinea (id enim convenit etiam triangulis, et quadrilateris) ut si inter rectorum angulorum numerus, qui est æqualis summæ omnium angulorum figuræ illius, duplicetur numerus laterum figuræ, et a producto demantur quattuor, numerus residuus indicabit angulos rectos, quos conficiunt anguli interni figuræ. Hinc Chiliogonum, seu figura mille laterum angulos habet mille nongentis nonaginta sex angulis rectis æquales.

Corollarium.

Quæcunque figuræ rectilineæ, dummodo sint ejusdem speciei, habent æquales summas angulorum internorum. Unde anguli trianguli quantumvis parvi, sunt æquales angulis trianguli magnitudinis infinitæ. Id, quod mirabilissimum est.

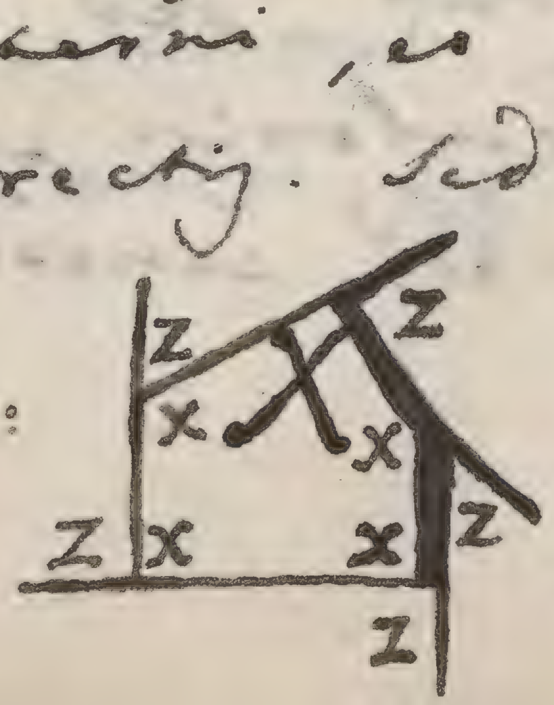
Theorema IX.

Cujuscunque Polygoni omnes anguli externi sunt quattuor rectis æquales.

Demonstratio.

Per Theorema 2. Cap. 2. quodlibet latus Polygoni cum quolibet latere producto facit utrimque angulos X, et Z duobus rectis æquales. Igitur sit propositum Pentagonum, Fig. 39. tab. 2. omnes anguli interni x cum omnibus angulis externis Z efficiunt tot binaria angulorum rectorum quot sunt latera; quare omnes externi, et interni simul sumpti sunt æquales decem rectis. Sed per Theorema præcedens

Fig:a 39::



omnes anguli interni & simul sumpti sunt æquales sex rectis; ergo si a decem rectis, quæ est summa omnium angulorum, tam internorum, quam externorum, auferantur sex recti, quæ est summa internorum, remanebunt quatuor recti pro summa omnium externorum, quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Omnes cujuscunque speciei figuræ rectilineæ habent æquales summas angulorum externorum. Quare trianguli tres exteriores anguli sunt æquales mille externis angulis Polygoni mille laterum. Quodque quidem sunt admiratione digna.

Monitum.

Duo triangula dicuntur æquiangula, cum anguli unius sunt æquales angulis alterius, singuli singulis. Et duo triangula vocantur æqualia, cum sunt æquiangula, et insuper cum latera singula unius sunt æqualia singulis lateribus alterius.

Caput III. sive Liber III.

De Circulo – Definitiones.

1. Circulus est figura plana, quæ sub una linea curva sic continetur, ut ab uno puncto, quod est intra figuram lineæ omnes ductæ ad lineam circumcurrentem sint æquales. Circulus enim non est sola linea circumcurrens, quæ circumferentia dicitur, sed spatium in ea conclusum. Hinc linea circularis est linea super planum ducta undique sibi concors, seu æquidistans a puncto,

quod est in medio plani. Circulus igitur generari intelligitur ex revolutione rectæ lineæ circa unum ejus extremum fixum, et immobile, usque donec redeat ad eum locum unde cœperat moveri.

2. Circumferentia vero, seu Peripheria, est linea circulum terminans. Circumferentia cujusque circuli sive magni, sive parvi, a Geometris intelligitur distributa in 360 partes æquales, quæ Gradus solent appellari. Quare Semicircumferentia in 180, et quadrans circuli in 90 gradus distribuitur. Quilibet gradus intelligitur distributus in 60 minuta prima; et quodvis minutum primum in 60 minuta secunda, et ita deinceps in 3a, in 4a &c. secantur. Has divisiones, tanquam commodissimas pro calculis elegerunt Mathematici. Distinguuntur ipsæ variæ minutorum species per virgulas, sic 40°. 30'. 45''. 32''', idest 40 gradus, 30 minuta prima, 45 minuta secunda, 32 minuta tertia.

3. Centrum circuli est punctum, a quo lineæ omnes ad circumferentiam ductæ sunt æquales, ut punctum A fig. 32. tab. 2.

4. Diameter Circuli est linea recta per centrum ducta, et circulum bifariam dividens. Talis est linea BC eadem figura.

5. Radius, seu Semidiameter, est linea a centro ad circumferentiam pertinens, ut AB, et AC eadem figura.

6. Semicirculus est fig.a comprehensa sub diametro, et semicircumferentia. Talis est BDC eadem fig.æ

7. Chorda est quævis recta linea intra circulum ducta, et ad circumferentiam utrinque terminata, ut linea recta BC eadem fig.a; quæ etiam nuncupatur subtensa.

8. Arcus est pars circumferentiæ, sive magnæ, sive parvæ a chorda subtensæ, ut DLC, vel DAC, eadē fig.ª
Hic observa, arcum quemlibet esse mensuram anguli in circuli centro comprehensi duobus radiis ad extremitates arcus ductis. Sic arcus DLC est mensura anguli DAC, eadē fig.ª Cumque in cujuslibet circuli centro fieri possint quatuor anguli recti, ex Theoremate primo capitis 2, et ejus Corollario; qui circumferentiam 360 gradum in 4ʳ arcus 90 graduum dividant; necesse est quemlibet angulum rectum esse 90 graduum, ut BAD, vel DAC, eadē fig.ª Et proinde, ut jam observavimus Definitione 11 capitis 2, omnes anguli recti sunt inter se æquales; cum singuli sunt 90 graduum. Itaque anguli obtusi plures, quam 90 gradus continent, ut EAC eadē fig.ª iique alii aliis majores esse possunt. Anguli vero acuti pauciores, quam 90 gradus comprehendunt, nec inter se sunt semper æquales, ut DAE, EAB, BAC. eadē fig.ª Cæterum quantiscumque æquales anguli totidem gradus suæ circumferentiæ capiunt, totique inter se sunt æquales

9. Recta circulum Tangens illa est, quæ habens commune punctum in circumferentia, licet producatur circulum non secat. Talis est linea recta HC fig. 33. tab 2; quæ circulum tangit in puncto C, et quæ dicitur tangens arcus BC, aut anguli BAC, quem ipse arcus metitur. Talis est quoque linea LD, quæ dicitur Tangens arcus BD, vel anguli BAD. Talis est etiam linea CBD fig. 33. tab 2.

10. Linea secans alicujus arcus est linea recta a centro per alterum ipsius arcus extremum producta, et a Tangente terminata: ut linea ABH, eadē fig.ª; est secans arcus CB, vel Anguli CAB: ut etiam linea ABL, est secans arcus BD, vel anguli BAD.

11. Sinus rectus alicujus arcus est semissis subtensæ duplo ipsius arcus: ut linea BI, est sinus rectus arcus BC eadē fig.ª 35. quia hæc linea BI est semissis lineæ BK, quæ subtenditur arcui BCK duplo arcus BC. Hinc sinus anguli recti est ipse radius, cum sit dimidia chorda semicirculi, diciturque sinus totus, videlicet omnium maximus.

12. Linea BS, dicitur Sinus cõplementi arcus BC, q̃ arcus BD, est cõplementum arcus BC ad quadrantem: nã CBD, est quadrans circuli, eadẽ fig.

13. Sinus versus alicujus arcus est pars semidiametri inter subtensã dupli ipsius arcus, et hunc eundẽ arcũ cõprehensa: ut IC est sinus versus arcus BC, q̃ est pars semidiametri AC, intercepta inter arcũ BCK, duplũ arcus BC, et ejus subtensã BIK, eadẽ fig.

14. Segmentũ circuli est fig. sub arcu, et chorda cõprehensa, ut BLC, fig. 32. tab 1, est minus segmentũ, et BDC majus segmentũ.

15. Angulus segmenti est ille, qui cõtinetur a Tangente, et Chorda ducta ã puncto contactus. Tales sunt anguli EBC segmenti minoris, et DBC segmenti majoris, fig. 33. tab 1. Ubi notandũ segmentũ CAB dici alternũ respectu anguli segmenti CBE, ut segmentũ CLB dicitur alternũ respectu anguli segmenti DBC.

16. Angulus in segmento est ille, qui cõtinetur duabus rectis, quæ ducuntur a finibus chordæ ad aliqđ arcus punctũ, ut angulus BAC in segmento BAC, fig. 33. tab 1. Hic angulus etiã dicitur angulus ad circumferentiã.

17. Angulus insistens peripheriæ, aut arcui est ille, qui continetur duabus rectis quæ ducuntur ab extremis finibus arcus ad centrũ circuli, vel ad aliquod punctum oppositæ circumferentiæ. Talis est in centro angulus BDC, fig. 33. tab. 2, insistens arcui BLC. Talis etiã est BAC eidẽ arcui insistens.

18. Sector circuli est Fig.a sub duobus radiis contenta, et iis radiis intercepta; talis est BDC sub radiis BD, et DC, et sub arcu BLC comprehensa, eadem Fig.a. Sector igitur circuli est portio ejus, quam duae rectae lineae a centro egredientes, et angulum ibidem constituentes continent cum arcu, quem intercipiunt. Unde si duae rectae lineae non egrediantur a centro, aut etiam angulum ibidem non constituant, portio circuli iis rectis, et intercepto arcu contenta, nequaquam sector appellabitur.

19. Similia segmenta sunt ea, quae aequales capiunt angulos. Ita segmenta maximi, et minimi circuli erunt similia si pares angulos capiant; ut Arcus EFG, in minore circulo, et BCD in majore, sunt similes, quia pares angulos EAG, et BAD capiunt, Fig.a 34. tab. 1.

20. Aequales circuli sunt ii, quorum diametri, vel radii sunt aequales.

21. Circuli, quorum unus alterum continet, si idem habent centrum, ut X, et Z, Fig. 40. tab. 1, dicuntur Concentrici; si diversum habent centrum, ut F, et D, Fig. 41. tab. 1, dicuntur Excentrici.

22. Circulus circulum contingere dicitur, quando ita quidem sibi mutuo occurrunt, ut portio unius non cadat intra portionem alterius, ut A, et B Fig. 43. tab. 1. Quod si autem occurrant sibi invicem circuli duo, sed portio unius cadat intra portionem alterius, tunc dicuntur duo illi circuli se mutuo secare, ut C, et D Fig. 44. tab. 1.

Nota ad definitionem 14, quod segmentum circuli appellatur etiam Portio circuli, quae est Fig.a plana contenta sub qualibet alia recta linea, intra circulum ducta, et portione circumferentiae, ab ea abscissa. 2.o Angulus ad centrum vocatur ille, qui habet verticem in ipso centro. Is vero, cujus vertex est in circumferentia, an-

gulus ad circumferentiam vocitatur. 3° Angulus in portione est angulus rectilineus, cujus vertex est in portione, latera vero transeunt per extremitates portionis. 4° Angulus portionis est angulus mixtilineus, quem arcus ejus portionis comprimit cum recta, quae arcum illum subtendit

Theorema 1.

Diameter ad Chordam, seu subtensam perpendicularis, eam secat bifariam. Nimirum BD, fig. 36. tab. 2. bifariam dividitur per Diametrum AEC. Nam cum latera BE, ED, sint aequalia, per definitionem circuli; triangulum BED est Isosceles: adeoque anguli in B, et D super basi BD, sunt aequales. Sed in triangulis BCE, DCE anguli ad C sunt recti, per perpendicularem EC, quae est etiam latus utrique commune. Ergo ipsa triangula sunt omnino aequalia, per Theorema 3.um cap. 2, ejusque Corollaria. Proindeque latus BC, est lateri CD, aequale, quod erat demonstrandum.

Corollaria

1. Non absimili ratione demonstrabitur rectam, quae chordam perpendiculariter, et bifariam secat, esse diametrum circuli, seu transire per centrum: rectam vero, quae per centrum transit, et bifariam dividit chordam esse ad eam perpendicularem.
2. Rectae extra centrum non se mutuo bifariam secant.

Scholium

Hujus Theorematis duae sunt partes, quarum altera alteram convertit. Unde non abs re erit hic advertere, quod cum in Circulo aliqua recta linea secat aliam non ductam per centrum, tria contingere possint; primum, ut linea secans

transeat per centrum circuli; alteram, ut secet aliam bifariam; et tertiam, ut eandem secet ad angulos rectos. ex his autem tribus, si duo quaelibet ponantur tertium quoque necessario poni debet. Nempe primo, si transeat per centrum circuli, et secet aliam non transeuntem per centrum bifariam, secabit eam ad angulos rectos. 2do, si transeat per centrum circuli, et secet aliam ad angulos rectos, secabit bifariam. Et tertio, si secet aliam cum bifariam, tum ad angulos rectos, transibit per centrum circuli.

Theorema II.

Si per extremum diametri terminum B ducatur BB, fig.ae 37. tab. II.ae, Perpendicularis ipsi Diametro, ea circulum in hoc solo puncto tanget.

Nam quodcunque aliud hujusce perpendicularis punctum, v.gr. punctum D, extra circulum erit. Enimvero si concipiatur linea AD, a centro A ad punctum D ducta, erit in triangulo rectangulo angulus ABD reliquorum maximus, cui proinde maximum latus opponitur, quod idcirco radio AB majus est: atque ita punctum D, extra circulum cadit: quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Nulla potest duci recta linea inter tangentem, et circumferentiam per punctum contactus B, eadem fig.a, quin secet circulum. Esto enim, si fieri possit, BC. Quia Angulus ABD rectus est, erit ABC acutus. quo ducta perpendicularis Ad minor erit quam radius AB, qui opponitur angulo recto. quare punctum d cadit intra circulum.

Theorema IIII.

Angulus ad centrum duplus est anguli ad circumferentiam, si eidem arcui insistant.

Tres in hac parte spectari possunt casus. Primus, quando unum latus anguli ad circumferentiam in unum latus anguli ad centrum incidit, ut Fig.a 1. tab 2.
Alius cum latera anguli ad circumferentiam angulum ad centrum includunt, ut Fig.a 2. tab 2.
Tertius, cum latera anguli ad circumferentiam, et anguli ad centrum sese inter se secant, ut Fig.a 3. tab. 2.

Sint igitur Anguli ABC, ADC in 1o casu, Fig.a 1. tab 2. eidem arcui AC insistentes: Dico angulum ABC in centro, duplum esse anguli D in peripheria. Nam Angulus ABC externus est respectu trianguli CBD. Quare aequalis est duobus internis D, et C per Theorema 2. capitis praecedentis. Anguli autem ipsi D, et C sunt aequales, cum radiis, seu lateribus aequalibus BC et BD opponantur. ergo angulus ABC est duplus anguli D.

Similiter in 2o casu, Fig. 2 tab 2. Angulus ABC duplus est anguli ADC. Nam si ducatur linea DBE transiens per centrum B, angulus ABE duplus est anguli ADE, et angulus EBC duplus est anguli EDC, per demonstrationem praecedentem, ergo totus angulus ABC duplus est totius ADC.

Denique in 3o casu, Fig. 3 tab 2, angulus ABC duplus est anguli ADC. Nam si ducatur linea DBE, totus angulus CBE ex modo demonstratis duplus est anguli CDE. Similiter angulus ABE duplus est anguli ADE: his igitur sublatis, residuus angulus ABC duplus erit residui ADC: quod erat demonstrandum.

Scholium

Diximus ad definitionem octavam hujus capitis, genuinam mensuram anguli constituti in circuli centro esse arcum inter duos radios comprehensum. Cum igitur dicimus mensuram cujuscunque anguli, v.gr. ABC, figuris 1, 2, 3, tab. 2, esse hunc, vel illum arcum, intelligimus hunc angulum aequalem esse angulo in centro constituto, cujus hic, aut ille arcus sit vera mensura. Unde sequentia deducuntur.

Corollaria

1. Anguli centri ABB, fig.a 1. et 2, tab. 2, insistens arcui AB dimidio arcus AC, cui insistit Angulus ABC ad circumferentiam est huic aequalis. Utriusque enim duplus est angulus in centro ABC, cujus mensura cum sit totus arcus AC, erit arcus AB nempe dimidius ipsius AC, mensura anguli ABB et consequenter anguli ABC ad circumferentiam.

2. Anguli in eodem segmento ABC, ADC sunt inter se aequales. Singuli enim sunt aequales dimidio anguli ABC ad centrum constituti, seu habent eandem mensuram ex Corollario praecedenti, scilicet dimidiam partem arcus AC, cui insistunt

3. Angulus ADB, fig.a 4 tab. 2 in semicirculo rectus est. ejus enim mensura est quadrans, sive dimidia pars semicircumferentiae ACB, cui insistit. Simili ratione erit angulus ACB in segmento minore obtusus, et angulus ABB in segmento majore acutus. Ille enim insistit arcui majori, hic arcui minori, quam sit semicircumferentia. ergo illius mensura erit arcus major, quam dimidia pars semicircumferentiae, hujus vero minor.

4. Quadrilateri AIBC, fig.a 5 tab. 2, circulo inscripti anguli oppositi B, et A, vel I, et C sunt duobus rectis aequales.

Ambo enim arcus, quibus insistunt bini anguli oppositi continent totam circumferentiam. Igitur eorum mensura est semicircumferentia, quae est duorum rectorum angulorum mensura.

Theorema IV.

Angulus segmenti, qui fit a linea tangente circulum, et chorda a punctum contactus ducta aequalis est angulo, qui fit in segmento alterno.

Etenim ducatur linea tangens F A E fig.ª 5 tab. 2: et chorda A D, dico angulum F A D esse aequalem angulo A C D in segmento alterno; et angulum E A D aequalem esse angulo A I D in segmento eodem alterno. Ducta diametro A C B erit a Theorema 2.ᵐ hujus capitis angulus F A B rectus. Sed rectus est angulus A D B in semicirculo. ergo in triangulo rectangulo A D B duo anguli D A B, D B A uni recto sunt aequales. Sed idem angulus D B A cum angulo D A F rectum efficit angulum. ergo anguli D A F, et A B D, seu A C D in eodem segmento, et quidem alterno, sunt aequales.

Dico jam angulum E A D, et A I D esse aequales. Nam in quadrilatero A I D C anguli oppositi I, et C a 4 corollarium praecedentis Theorematis sunt aequales duobus rectis. Sunt autem anguli deinceps positi F A D, D A E a Theorema primum capitis primi duobus rectis aequales. Sed angulus C est aequalis angulo F A D a demonstrationem praecedentem, erit ergo angulus I angulo D A E aequalis.

Corollarium.

1. Mensura anguli segmenti minoris F A D est dimidia pars arcus A I D, quem chorda A D subtendit, sicut mensura anguli D A E segmenti majoris est dimidia pars arcus A C D.
2. Duae tangentes F B, F D, figª 6 tab: 2. sunt aequales. Ducta enim chorda B D conjungente puncta contactus sunt anguli F B D, F D B aequales cum sit eadem utriusque mensura, scilicet dimidia pars arcus a chorda subtensi. Est ergo triangulum isosceles F B D a corollarium 2dum Theorematis 2di capitis 2di;

Theorema V.

Omne polygonũ circulo circũscriptum æquale est triangulo rectangulo, cujus alterum crus est æquale radio circuli, alterum vero toti peripheriæ polygoni.

Nam in recta indefinita BA, fig. 9 tab. 2, sumantur bases AB, BD, &c æquales basibus ab, bd, &c triangulorum acb, bcd, &c in quæ polygonũ dividitur, fig. 8 tab. 2. Tum in puncto A, fig. 9 excitetur perpendicularis AC æqualis radio cg, fig. 8, hoc est, æqualis altitudini triangulorum in polygono contentorum: sitq; CP parallela basi AA, ut omnes lineæ perpendiculares cg, ch, &c fig. 9, sint tum sibi mutuo æquales, tum radio cg, fig. 8.

Manifestum est triangula alba AcB, et BcD, &c fig. 9 æqualia esse triangulis acb, bcd, &c fig. 8, in quæ dividitur polygonũ. Sed his triangulis albis æqualia sunt triangula nigris lineis incisa, fig. 9; siquidem triangulum album Agc æquale est triangulo nigro ACc, et triangulum album Bcg triangulo nigro Bnc, &c. ergo totum parallelogrammũ AP duplum est triangulorũ alborũ.

Sed idem Parallelogrammũ AP duplũ est trianguli AAC, per Theorema V capitis 2di. ergo Triangulum rectangulum AAC, cujus crus unum AA æquale est peripheriæ polygoni, alterum vero AC est æquale radio cg; triangulum, inquam, ipsum rectangulum AAC est æquale triangulis albis fig. 9, ac proinde toti polygono fig. 8.

Theorema VI

Omne polygonũ ordinatum, seu regulare (quod nempe fit ex æqualibus circuli cordis) circulo inscriptum æquale est triangulo rectangulo, cujus crus alterum æquale est peripheriæ polygoni, alterum vero perpendiculari cg fig. 5 tab. 2 a centro c ad quodvis polygoni latus ab demissæ.

Demonstratio eadem est, quae praecedentis Theorematis.

Corollarium.

Cum polygonum infinitorum pene laterum circulo circumscribi possit, vel inscribi: hinc sequitur eorum perimetros accedere posse in infinitum ad circuli circumferentiam, tametsi perimeter circumscripti sit semper circumferentia circuli major, inscripti vero minor.

Sed Polygonum circulo circumscriptum aequale est triangulo rectangulo, cujus alterum crus est circuli radius, alterum polygoni perimeter: polygonum vero circulo inscriptum est aequale triangulo pariter rectangulo, cujus alterum crus est perimeter polygoni, alterum vero perpendicularis a centro circuli ad quodvis polygoni latus demissa. Ergo pariter circulus erit aequalis triangulo rectangulo, cujus crus unum aequale sit radio, alterum vero circuli circumferentiae, ut demonstrat Archimedes in libello de dimensione circuli.

Scholium.

Licet perimeter polygoni, sive circulo circumscripti, sive circulo inscripti accedere possit in infinitum ad magnitudinem circumferentiae ejusdem circuli, nunquam tamen ipsi fit aequalis: hinc difficultas quadraturae circuli.

Cap. IV. sive

Liber IV. De Solidis.

Definitiones.

1.a Solidum, seu corpus est, quod longitudinem, latitudinem, et profunditatem habet.

2.ª Solidi extremũ est superficies, superficiei vero linea, lineę autem punctũ.

3.ª Ut angulus planus fit ex rectis lineis in plana superficie exaratis, ita angulus solidus fit ex pluribus angulis planis, qui nõ sunt in eodem plano constituti.

4.ª Angulus itaq; solidus rectilineus est, qui pluribus, quã duobus planis angulis BOA, COA, vel DOC, COA fig: 10 tab: 2 non in eodem existentibus plano, sed ad unũ punctũ O terminatis, continetur.

5.ª Æquales solidi anguli sunt, qui intra invicem positi congruũt. Quemadmodũ angulus planus est inclinatio linearũ, ita solidus angulus est inclinatio superficierũ. De utroq; igitur eodem modo ratiocinandũ erit.

6.ª Prisma est figura solida, planis comprehensa, quorum adversa duo ABC, et OCA, vel GH, et KL fig. 11 tab: 2, sunt parallela, æqualia, et similia, reliqua vero parallelogramma.

7.ª Parallelepipedũ est solidũ sex parallelogrammis ex adverso parallelis comprehensum, ut KOLPGIH fig: 12 tab: 2. quare omne parallelepipedum revera prysma est, nõ vicissim.

8.ª Si sex plana ex adverso parallela sint quadrata, solidũ iis comprehensum Cubus erit. fig: 12 tab 2. Unde omnis Cubus est parallelepipedũ, nõ vicissim.

9.ª Pyramis est solidum ZL triangulis ALC, CLA, ALB, BLA comprehensũ, ab uno plano Z ad unũ punctũ L constitutis. fig: 13 tab. 2.
Planũ Z basis dicitur, et esse potest vel triangulũ, vel quadrangulum, vel quævis alia figura (rectilinea); ex cujus

lateribus singulis triangula surgunt, in unum punctum L, quod vertex dicitur, coeuntia; ut triangulum inter rectilineas figuras planas, ita pyramis (triangularis, quae pro basi triangulum habet) inter solidas prima et simplicissima est.

10. Si extra planum alicujus circuli CL, fig: 14 et 15 tab: 2, acceptum fuerit punctum A, ab eoque ducatur recta infinita AB tangens circulum in C, quae puncto A manente fixo, circa peripheriam circuli convertatur, donec in eum locum ACB redeat, unde moveri coeperat; superficies a recta linea ACB descripta dicitur Conica superficies; corpus vero, quod hac superficie, et circulo CL continetur, Conus vocatur.

Vertex Coni est A. Basis Coni est circulus CL; axis Coni est recta AB ex vertice ad baseos centrum ducta. Latus coni est recta AC a vertice ad baseos circumferentiam ducta, quam esse totam in Coni superficie ex ejus genesi est manifestum.

Conus rectus est, cum axis AB est basi rectus, fig. 14. tab: 2. Conus scalenus seu obliquus est, cum axis AB non est ad basim rectus, fig: 15 tab: 2.

Oritur etiam Conus rectus a triangulo rectangulo CBA circa unum latus perpendiculare AB in orbem ducto, fig: 15 tab:

11. Si circa duos circulos aequales, et parallelos CL, OQ, recta linea infinita COB convertatur, donec in locum redeat, unde moveri coepit, sic ut mota sibiipsi, et rectae BA circulorum centra jungenti semper parallela maneat; superficies a recta COB descripta, dicitur Cylindrica superficies; corpus vero, quod hac superficie, et binis circulis continetur, Cylindrus vocatur, fig: 16, et 17. tab: 2.

Bases Cylindri sunt circuli CL, OD. Axis Cylindri est recta AB basium centra connectens. Latus Cylindri est recta OC in Cylindri superficie utramque basim tangens.

Rectus Cylindrus est, cum axis ad bases rectus est, fig. 16 tab: 2. Scalenus Cylindrus dicitur, cum axis ad bases non est rectus. Fig. 17 tab: 2.

Fit etiam Cylindrus rectus a rectangulo OCBA circa unum latus BA in orbem ducto, Fig: 16 tab: 2.

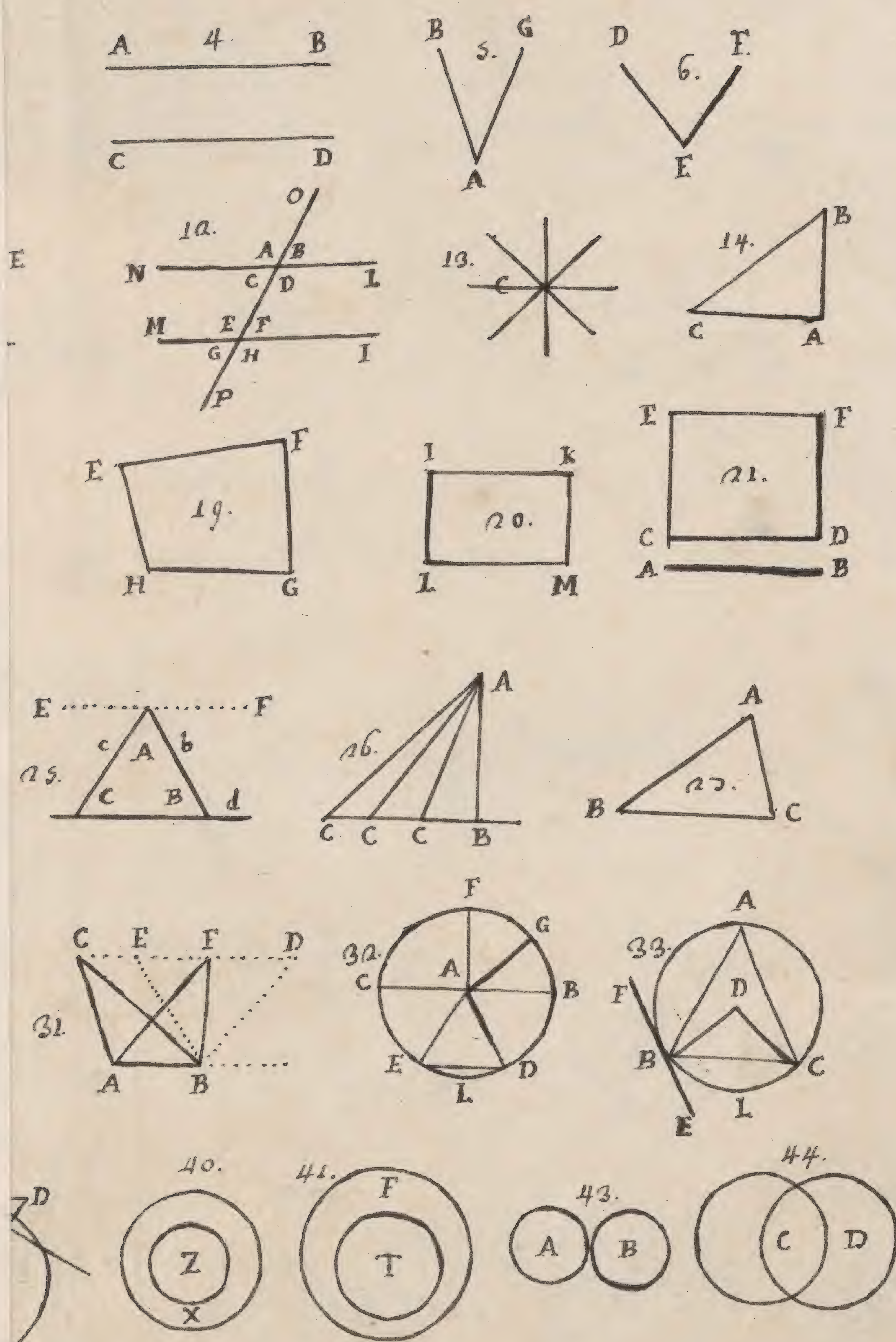
12. Sphaera est solidum comprehensum una superficie, ad quam omnes rectae lineae a quodam puncto intra ipsam posito ductae sunt aequales. Punctum illud C centrum dicitur, Fig. 18 tab: 2. Diameter Sphaerae est recta OD a centro ducta, et ad superficiem utrimque producta; cujus media pars CO semidiameter, aut radius appellatur.

Circulus ALAF, Fig. 19 tab: 2. rectam AB contingat in puncto A; tum super eadem AB seipsum circumagendo moveatur, donec longitudine AB suae circumferentiae aequali emensa, punctum contactus A in sublime prius latum, tum circuitu facto veniat in B, ibique eandem AB contingat. Curva ADB ejusmodi motu a puncto A descripta, Cyclois dicitur, recta AB illius basis; bisecta AB in C, quae ex C ducitur usque ad curvam perpendicularis CD, Cycloidis altitudo, vel axis appellatur, et punctum D vertex; circulus ALAF, seu globus, ex cujus scilicet motu Cyclois oritur, circulus generator, ejusque punctum A, quod curvam ipsam describit punctum lineans dicitur. Curvae hujus proprietates pulcherrimae a nostri temporis Mathematicis detectae sunt, veluti a Cristophoro Wren,

Ioanne Wallisio, Cristiano Ugenio, aliisque. De hac linea in physicis ubi de pendulis actum fuit, locuti fuimus. Illud hic est advertendum, de Cono, quinque modis eum secari posse. I.°, plano per verticem A D B, fig: 20 tab: 2, et fit triangulum A D B. 2do, plano basi parallelo, et fit circulus. 3tio, plano A S A lateri Coni A D parallelo, et sectio dicitur Parabola. Quarto, plano K L K duobus Coni lateribus ita occurrente, ut basi nō sit parallelum, et fit Ellipsis. Quinto, plano C Q D, et fit Hyperbola.

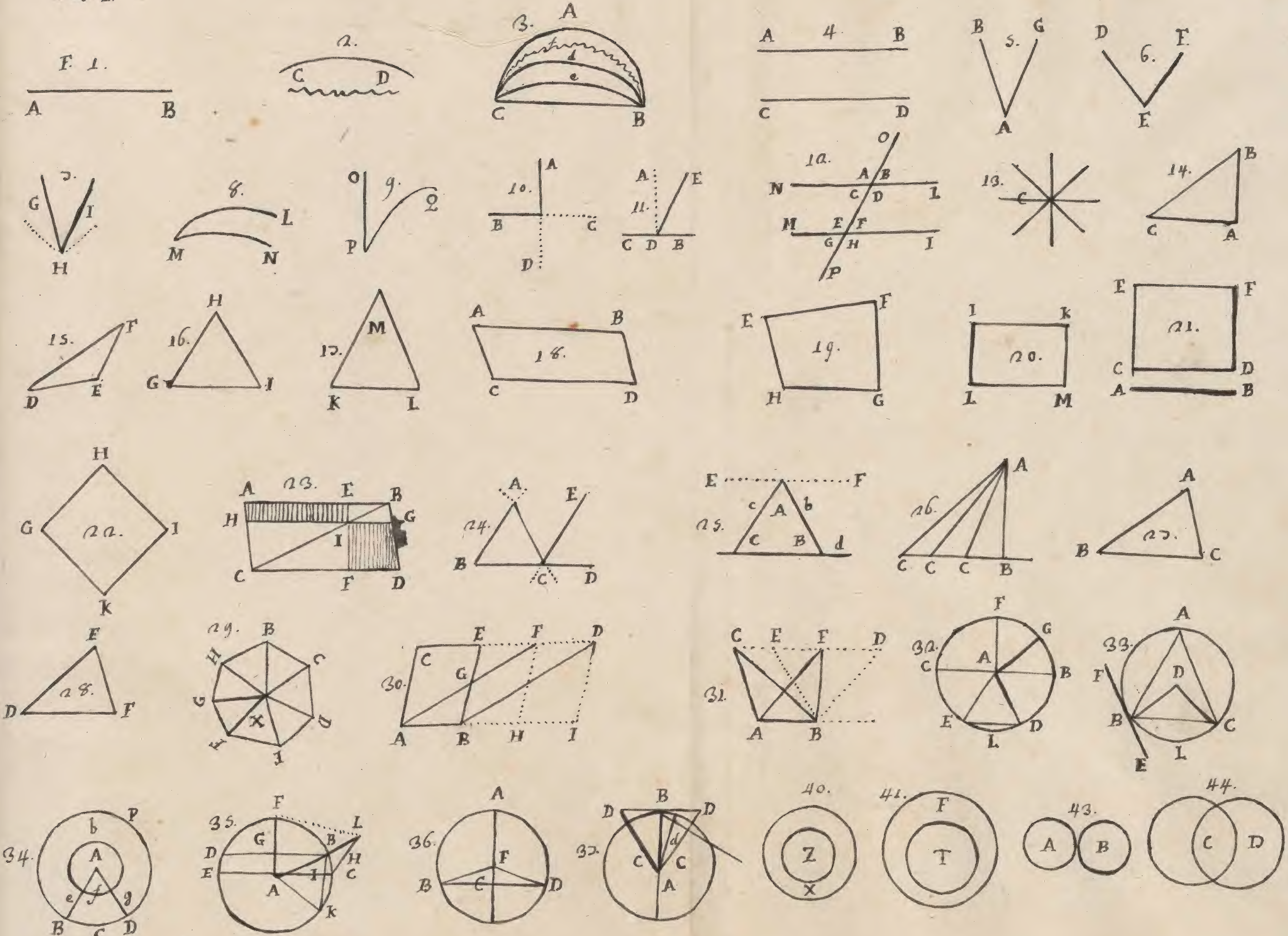
57

№ 12



A 4 B
C D
B 5. G
A
D 6. F
E
E
12.
O
A B
N C D L
M E F
G H I
P
13. C
14. B
C A
E F
19.
H G
I K
20.
L M
E F
21.
C D
A B
E F
c A b
25. C B d
A
26.
C C C B
A
27.
B C
C E F D
31.
A B
F
32. G
A
C B
E D
L
A
33.
F D
B C
L
E
D
40.
Z
X
41.
F
T
43.
A B
44.
C D

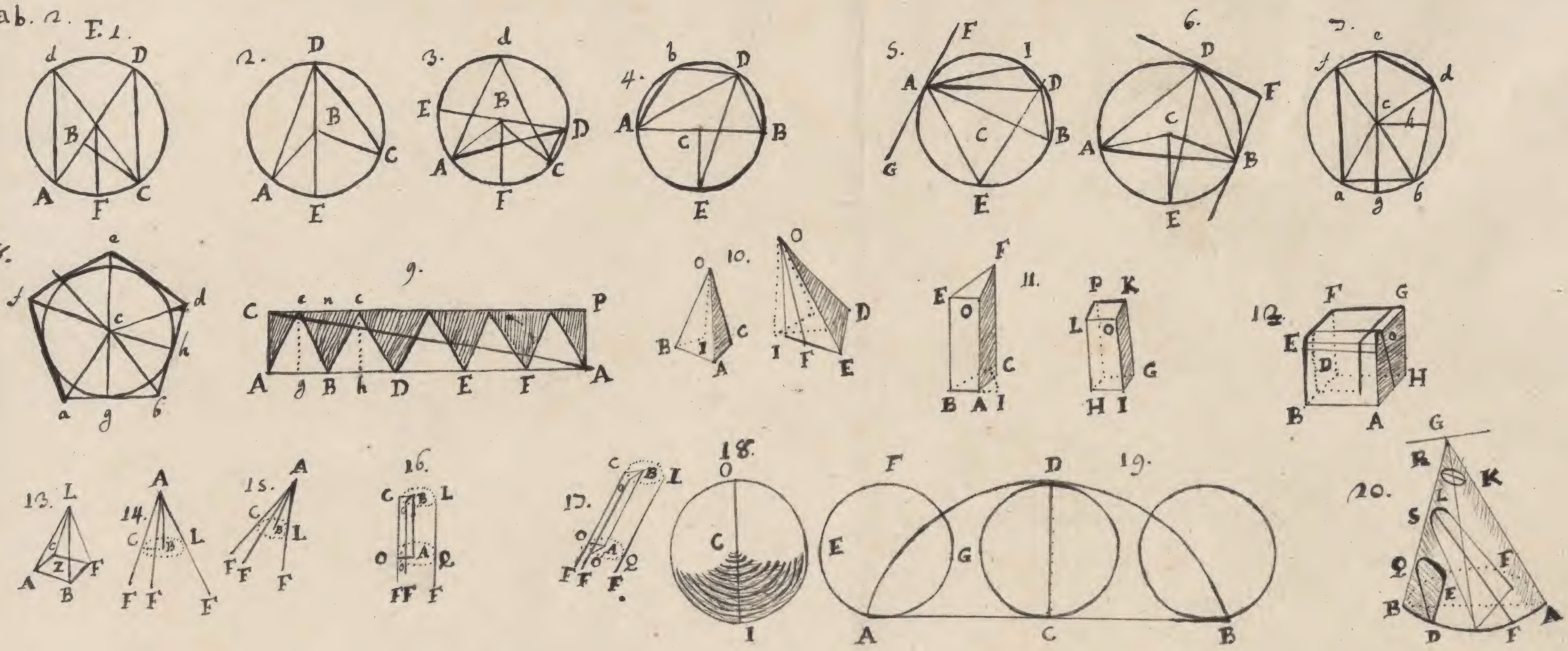
Tab. 1.



F. 1. A B
2. C D
3. A C B f d e
A 4 B C D
B 5. G A
D 6. F E
7. G I H
8. L M N
O 9. Q P
10. A B C D
A 11. E C D B
12. O N A B C D L M E F G H I P
13. C
14. B C A
15. F D E
H 16. G I
17. M K L
A B 18. C D
E F 19. H G
I K 20. L M
E F 21. C D A B
H G 22. I K
A 23. E B H G I C F D
A E 24. B C D
E F c A b 25. C B d
A 26. C C C B
A 27. B C
E 28. D F
29. B C D I F G H X
C E F D 30. G A B H I
C E F D 31. A B
F G 32. A C B E D L
33. A D F B C E L
34. b P A e f g B C D
F L 35. G B D E A I H C K
A 36. F B C D
B D D 37. C d C A
40. Z X
41. F T
43. A B
44. C D



Tab. 2.



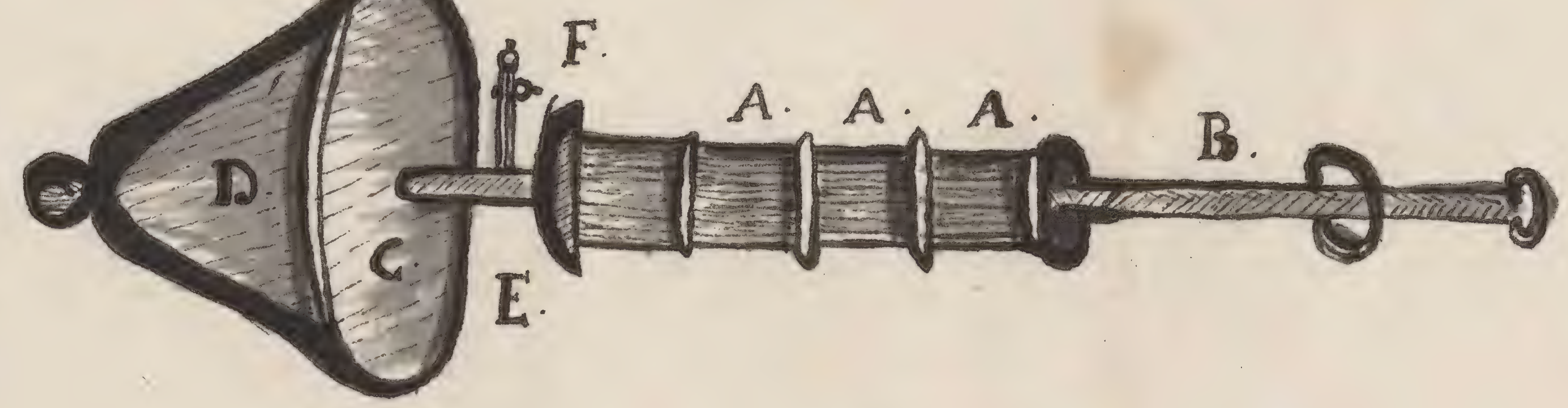
F. 1.
d D B A F C
2.
D B A E C
3.
d B E D A F C
4.
b D A C B E
5.
F I A D C B G E
6.
D F C A B E
7.
e f d c h a g b
8.
e f d c h a g b
9.
C e n c P
A g B h D E F A
10.
O B I A C
O D I F E
11.
F E O C B A I
P K L O G H I
12.
F G E D O H B A
13.
L C Z A B F
14.
A C B L F F F
15.
A C B L F F F
16.
C B L O A Q FF F
17.
C B L O A Q FF F
18.
O C I
19.
F D E G A C B
20.
G R K L S Q F E B D F A

Tab. I.

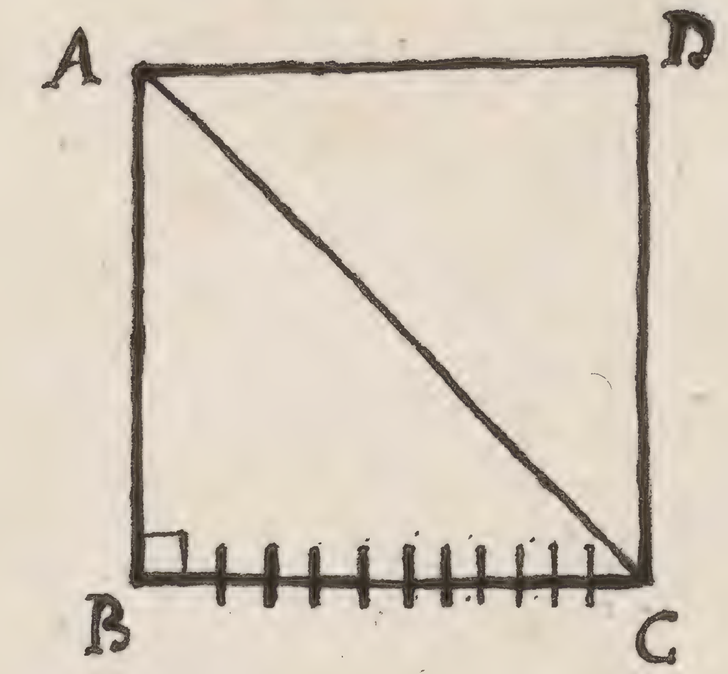
Fig. 1. Tab. 1. Pag. 101.

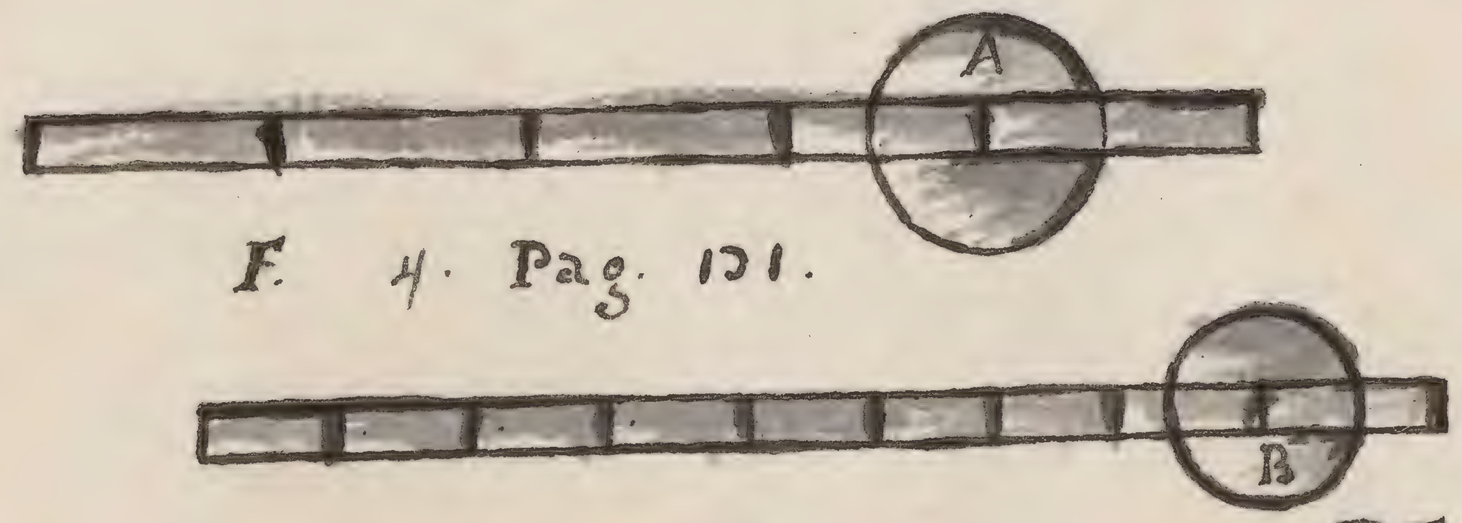


F. 2 Pag. 129.

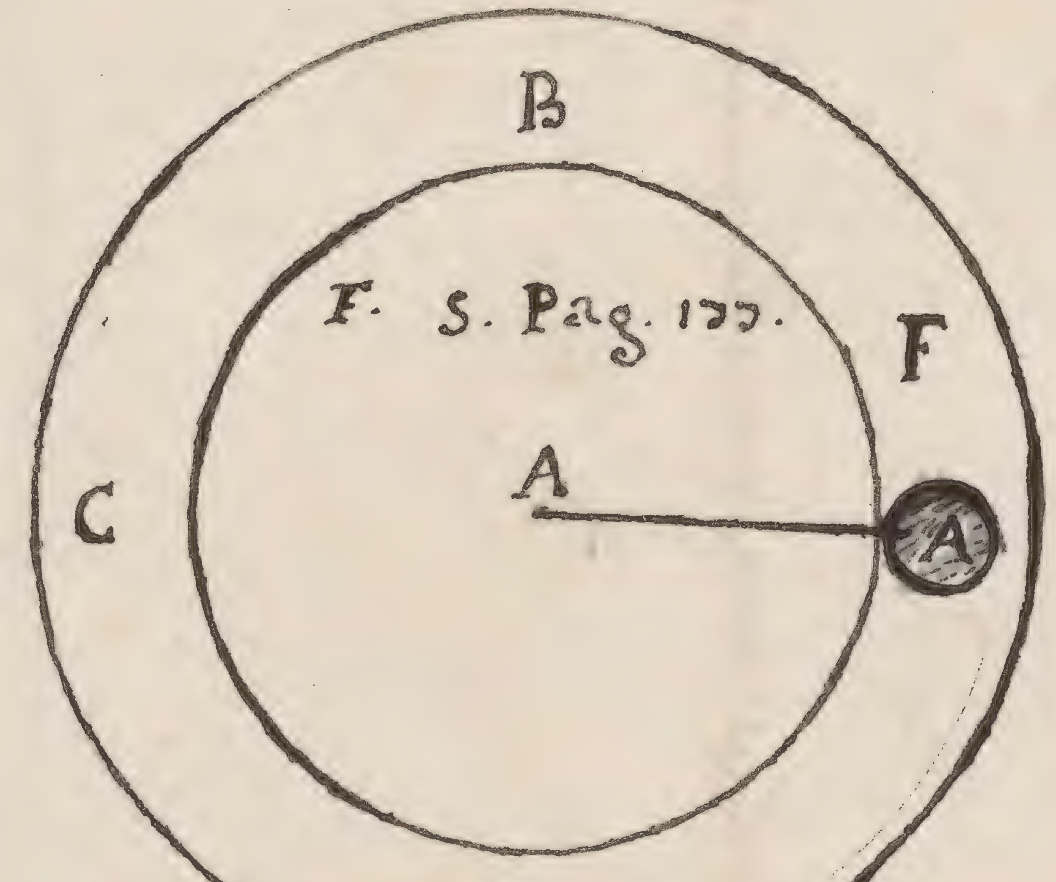


F. 3. Pag. 138.

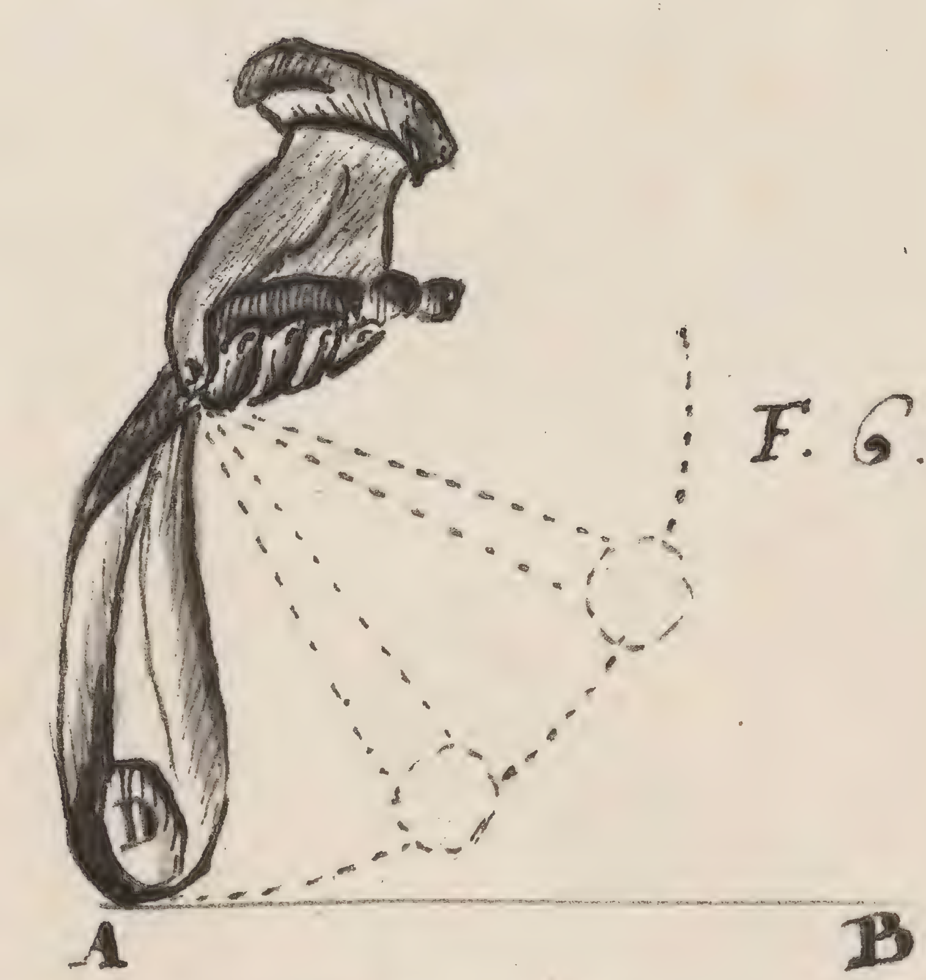




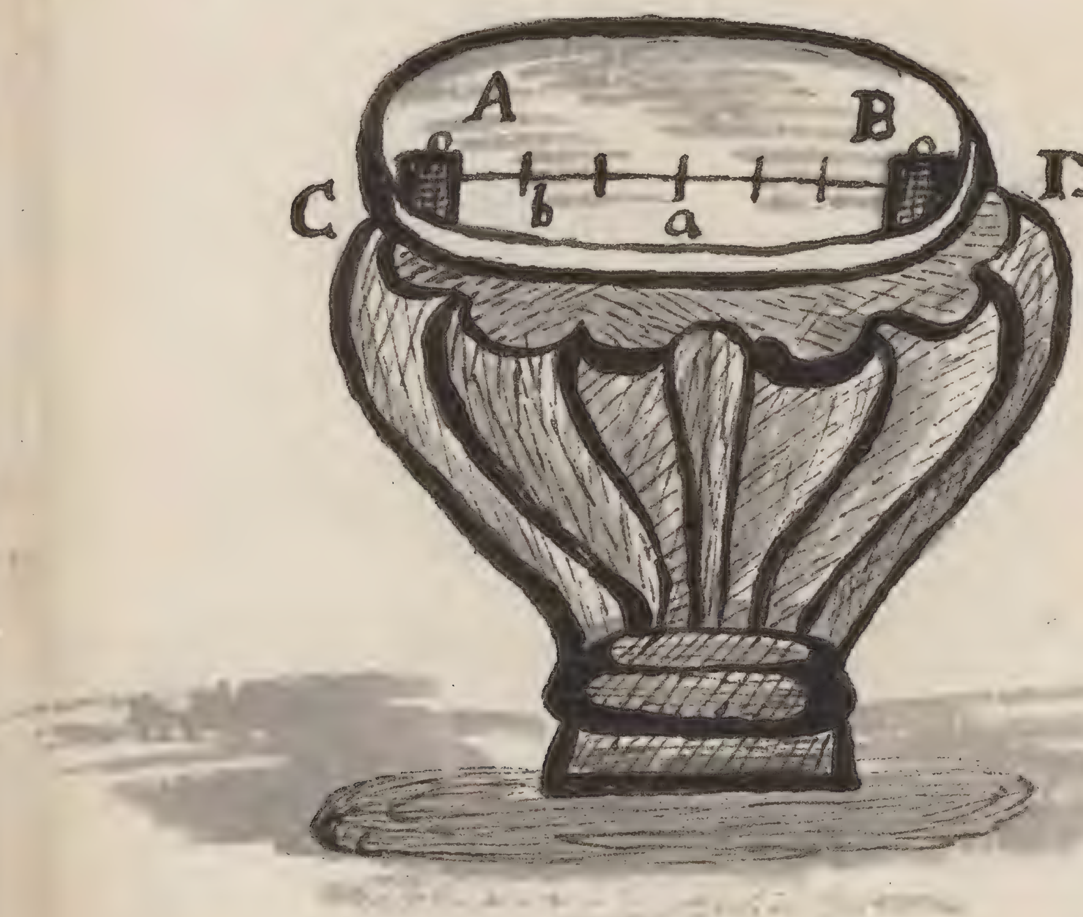
F. 4. Pag. 131.



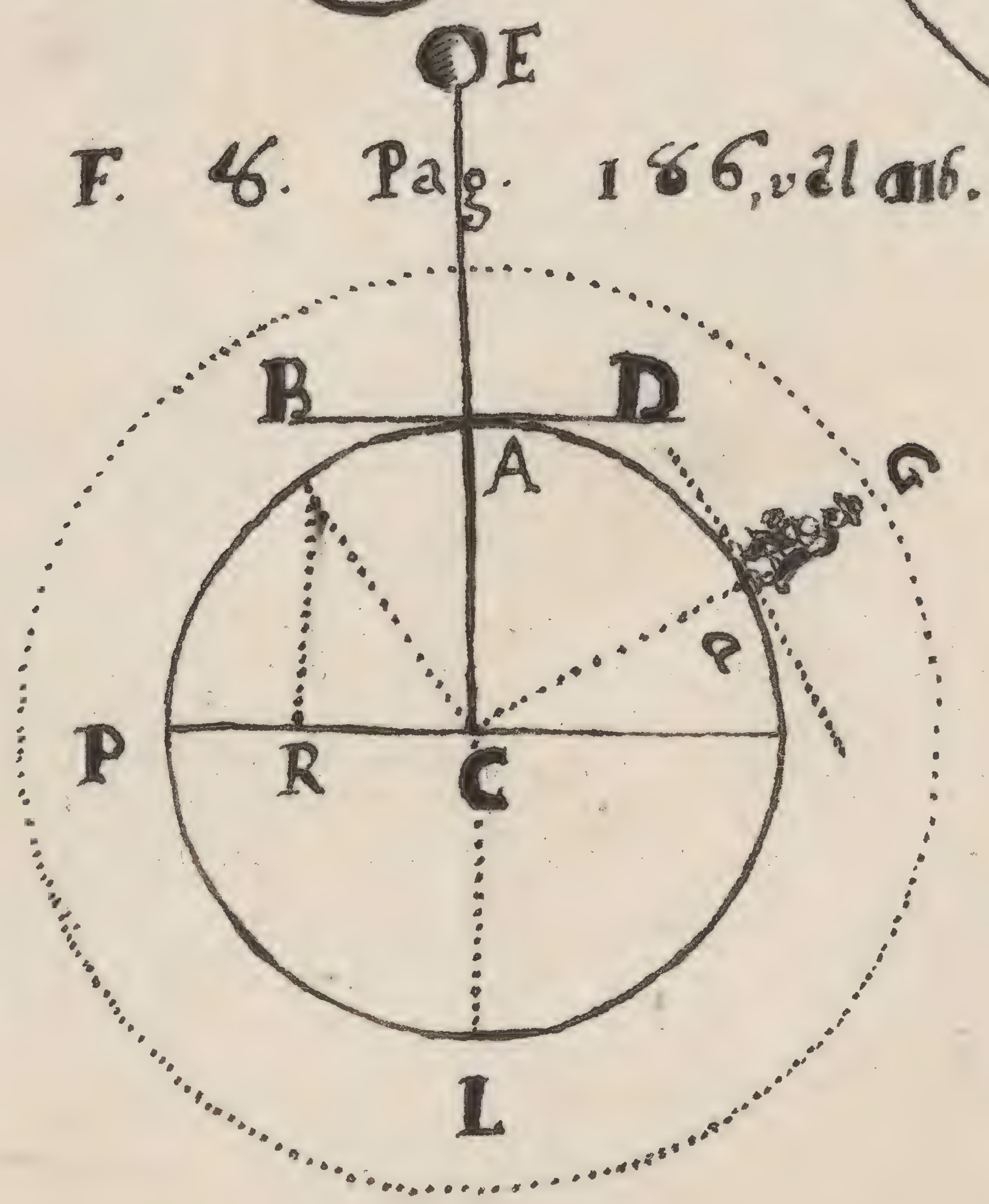
F. 6. Pag. 138.



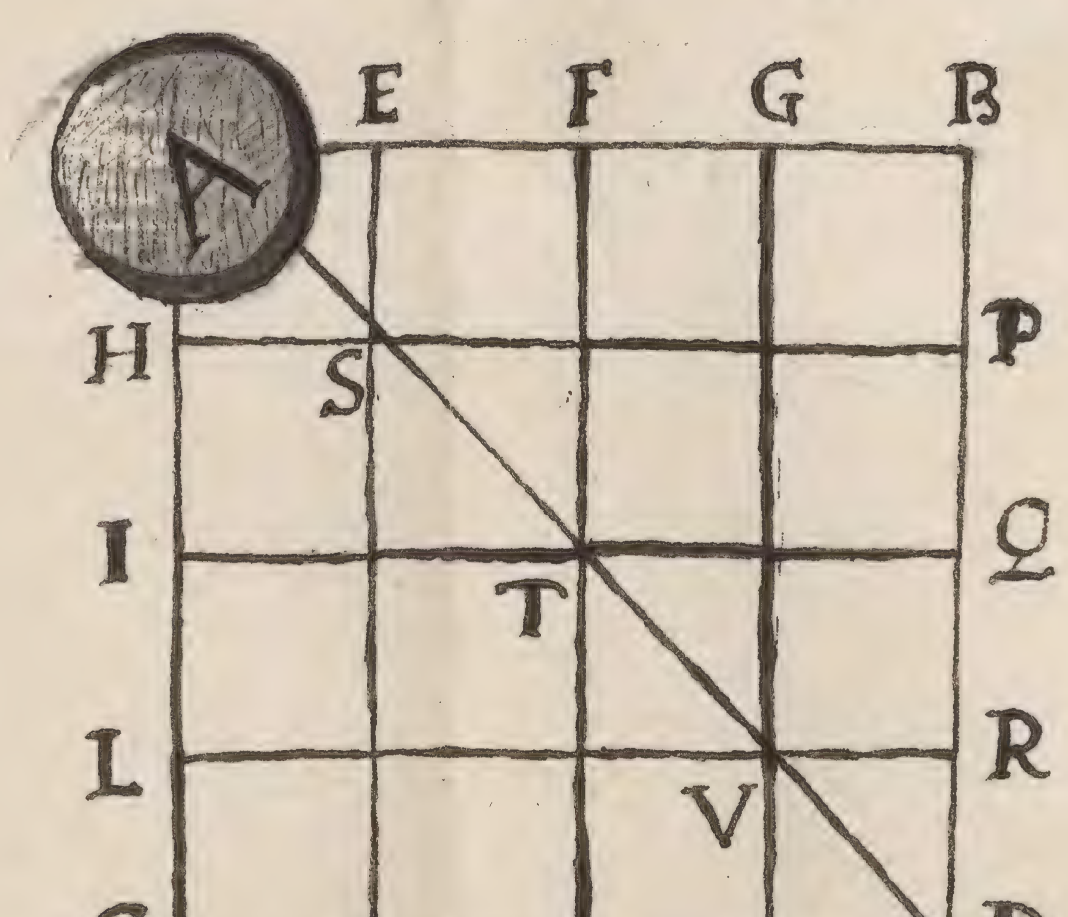
F. 7. Pag. 141.



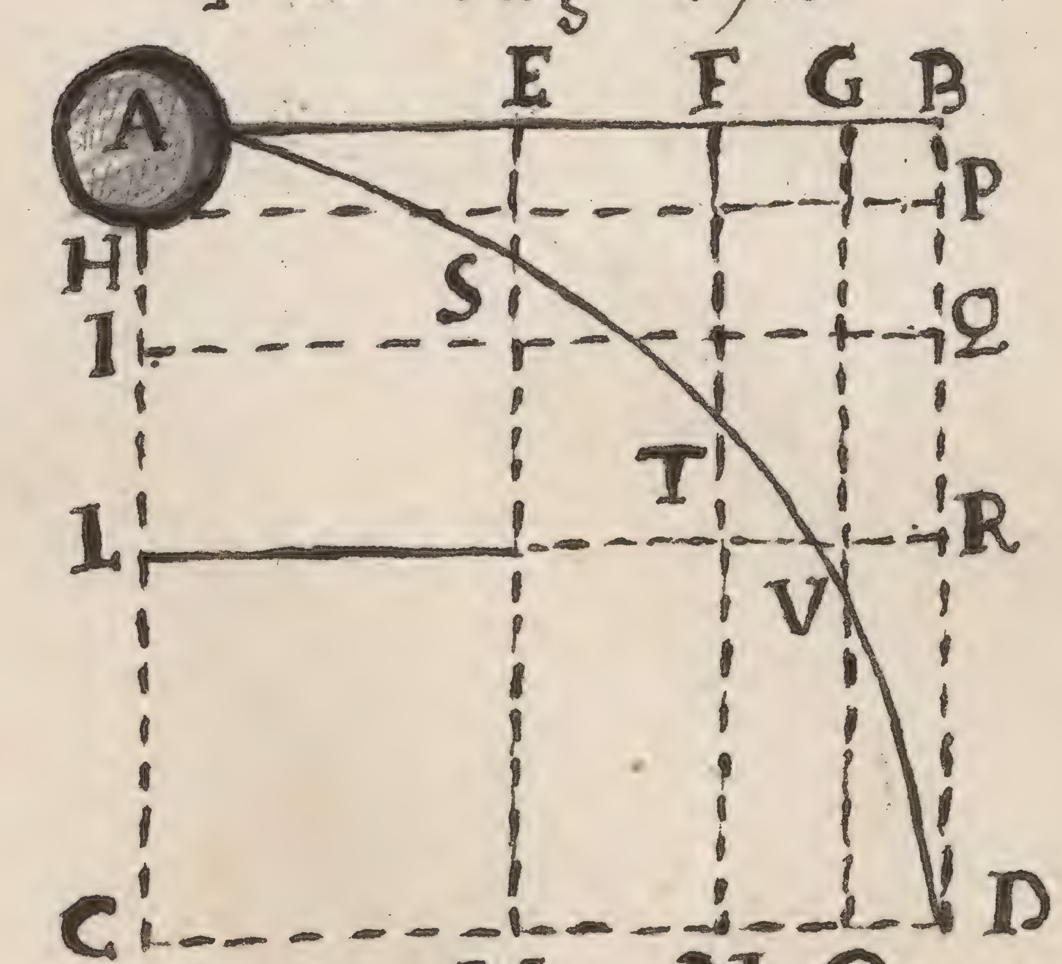
F. 8. Pag. 186, vel 216.



F. 9 Pag. 192



F. 10. Pag. 193.



Tab. II.

Tab. 2. F. 11. Pag. 195.



F. 12. Pag. 195.

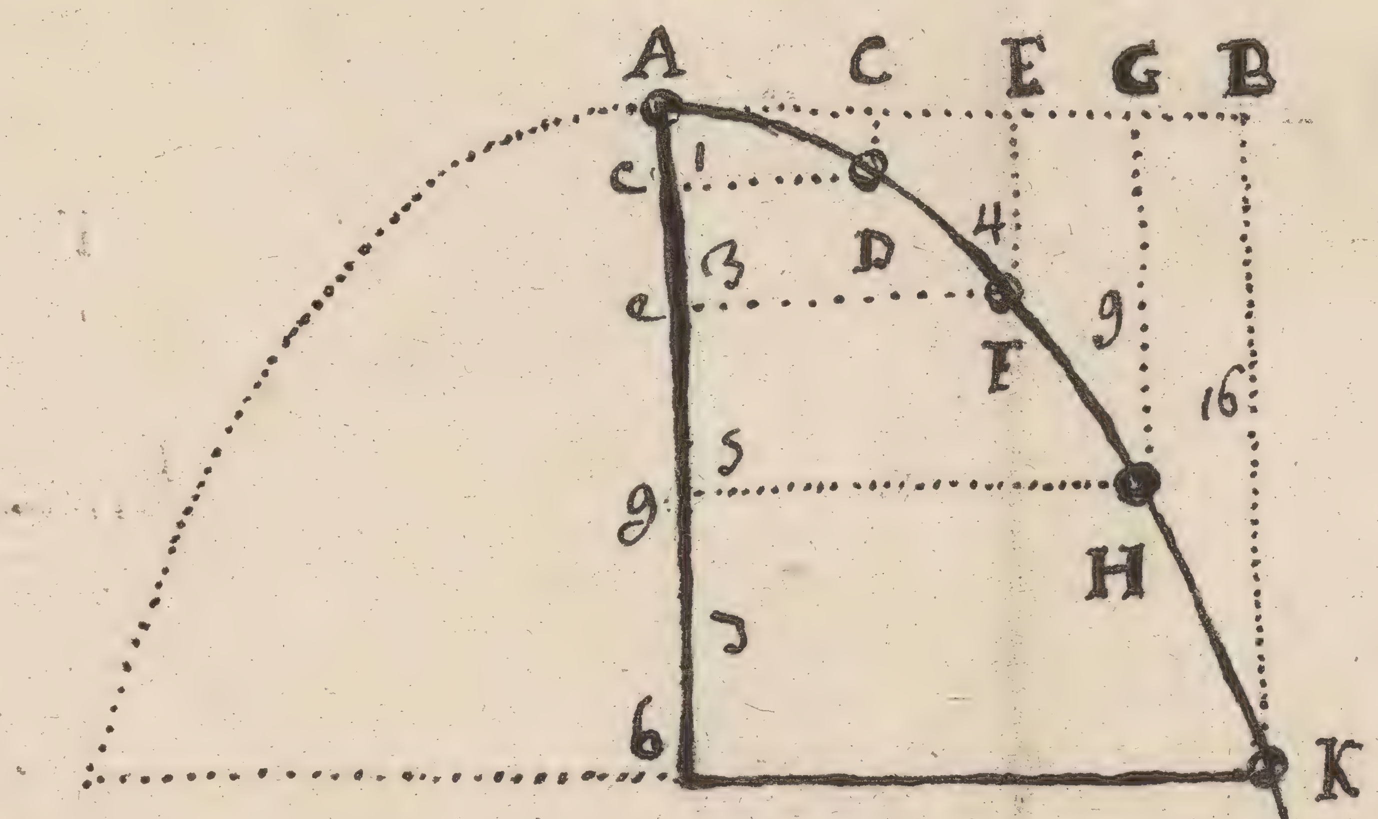
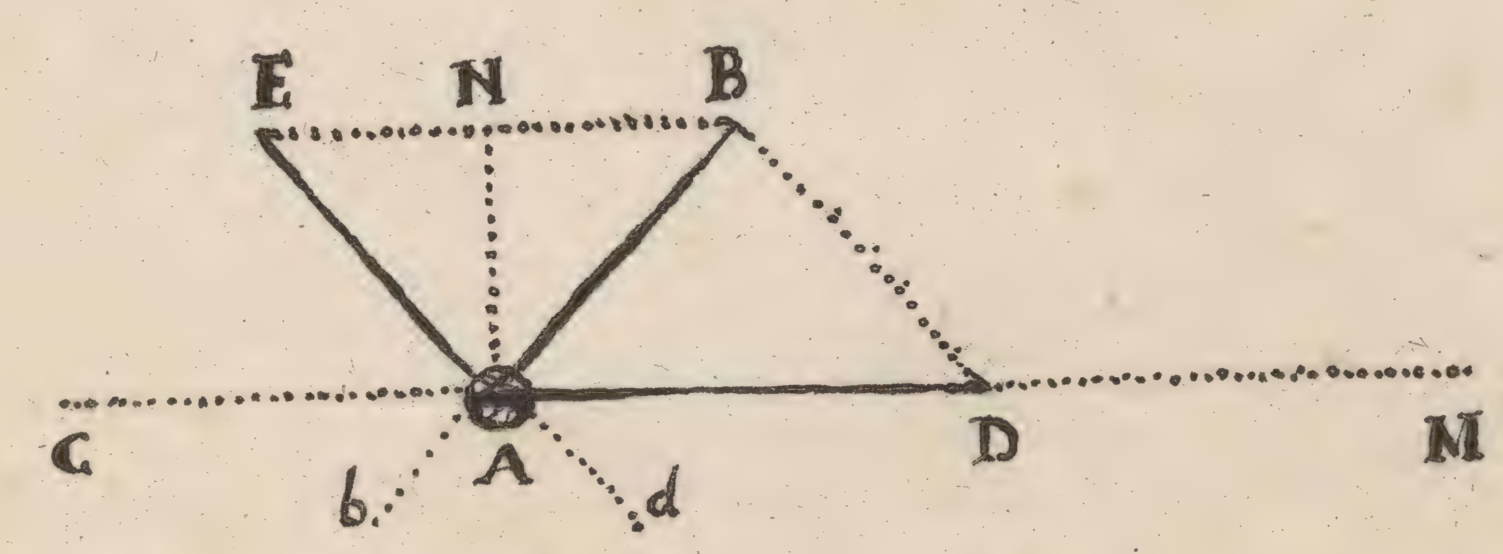
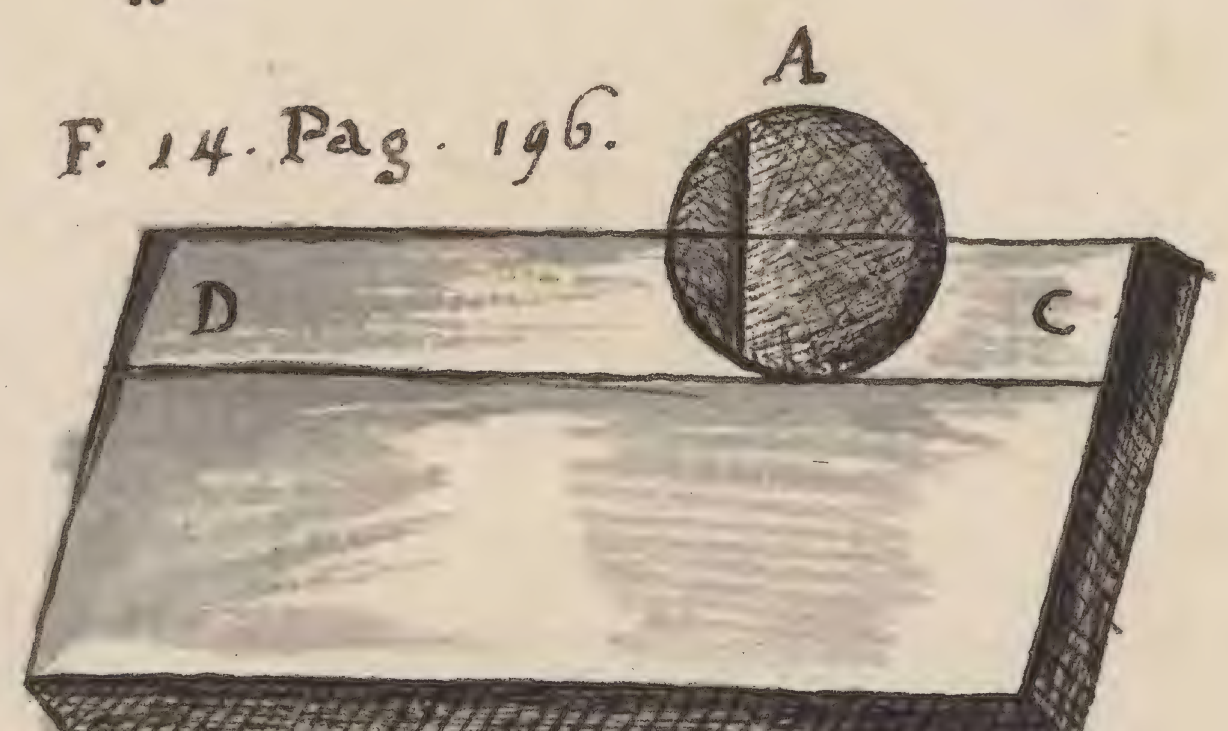


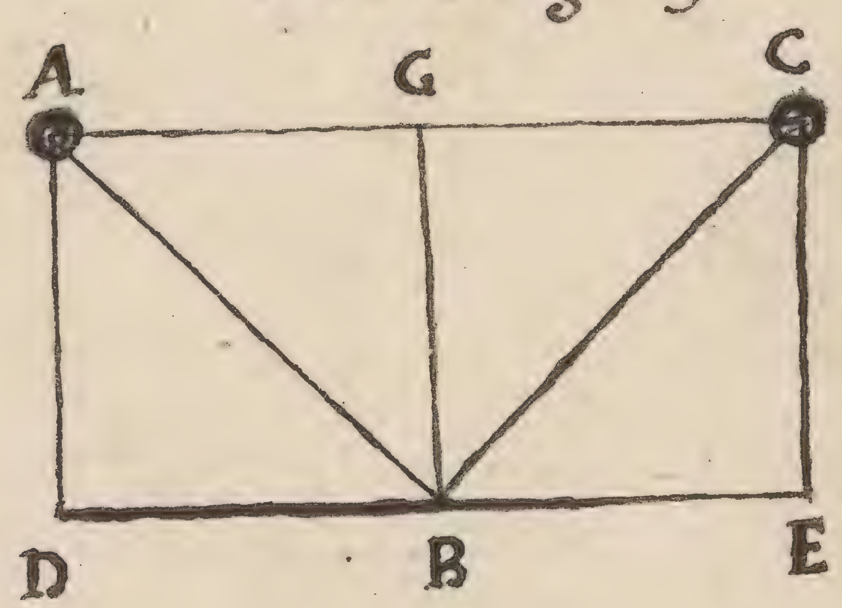
Fig. 13. Pag. 197.



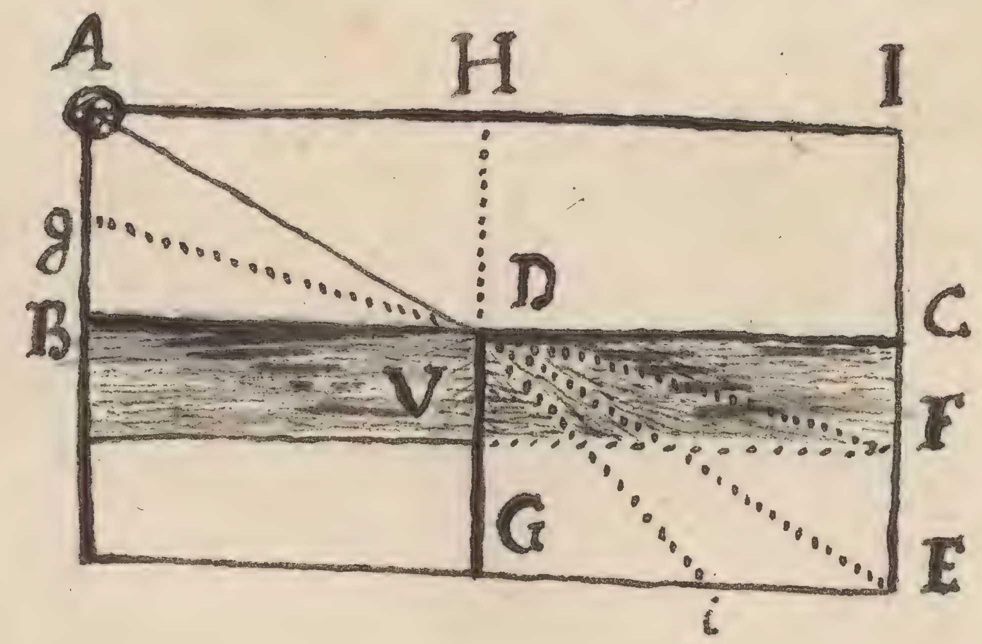
F. 14. Pag. 196.



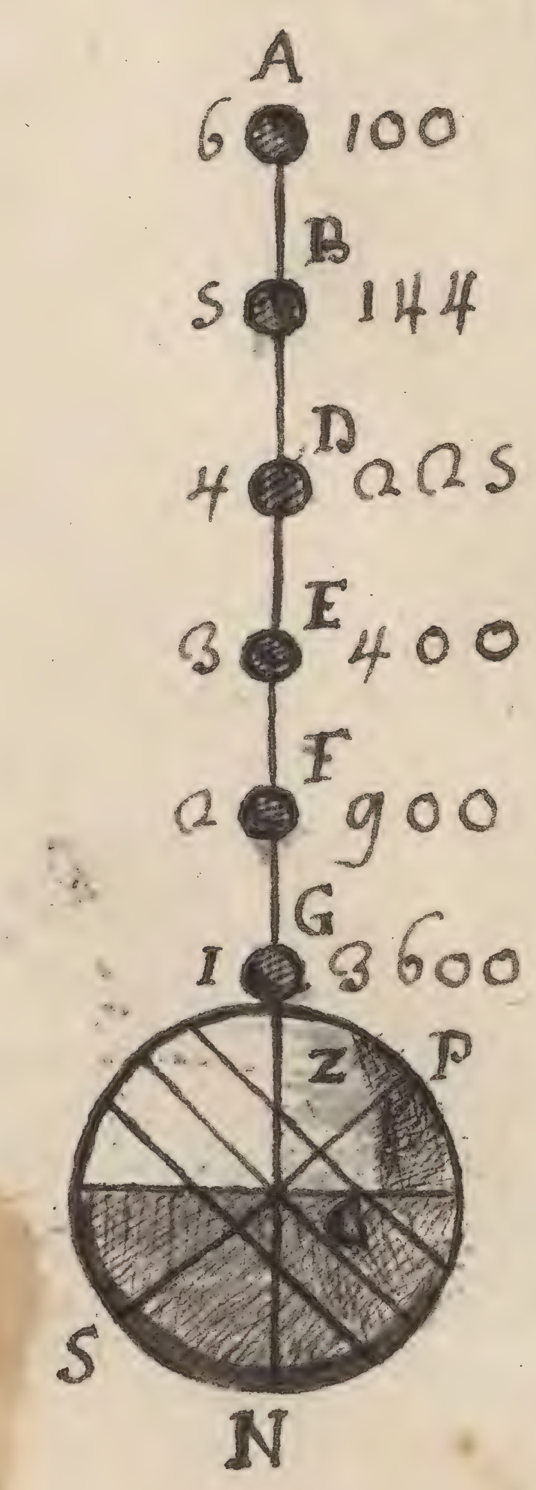
F. 15. Pag. 198.



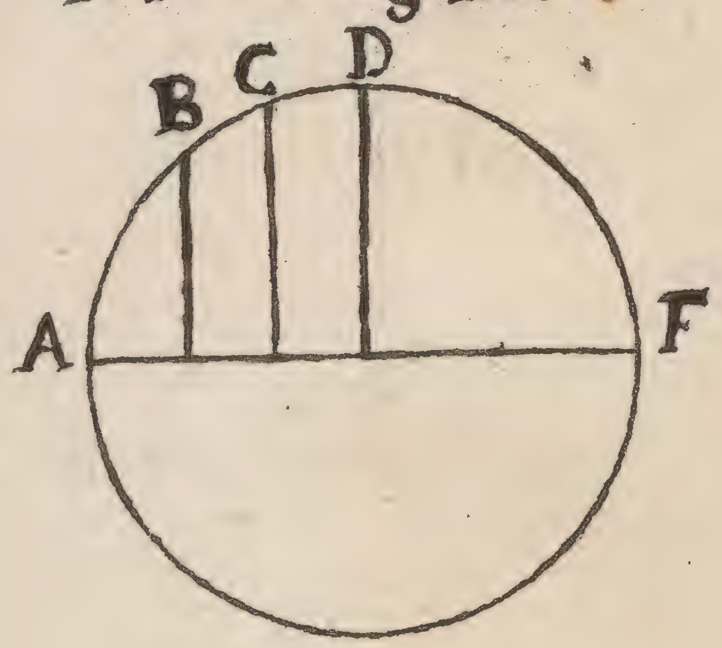
F. 16. Pag. 200.



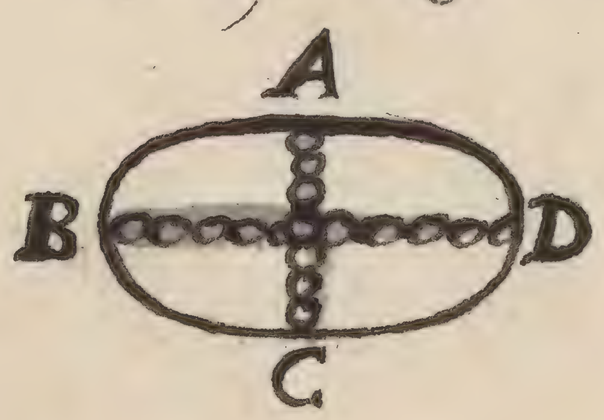
F. 17. Pag. 210.



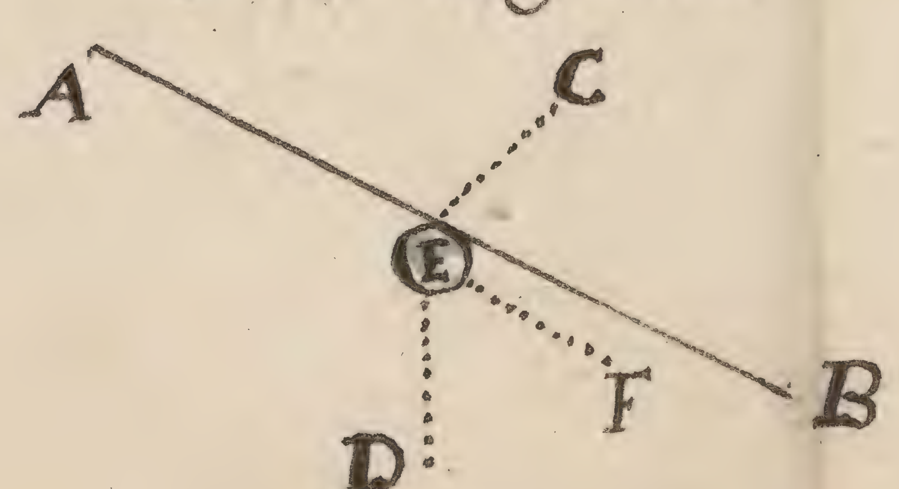
F. 18. Pag. 215.



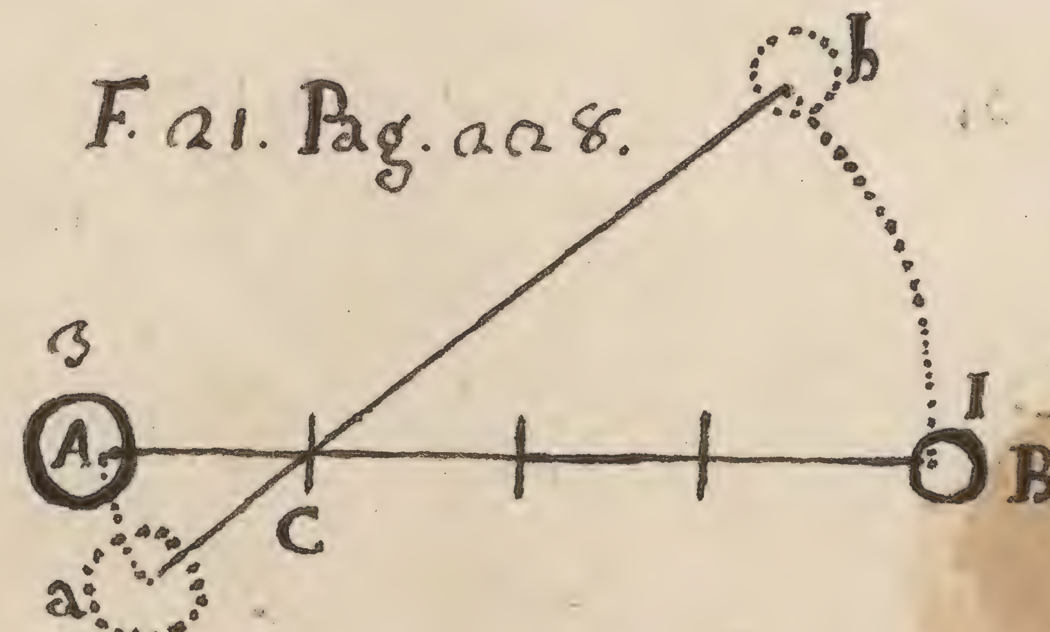
F. 19. Pag. 221.



F. 20. Pag. 222.

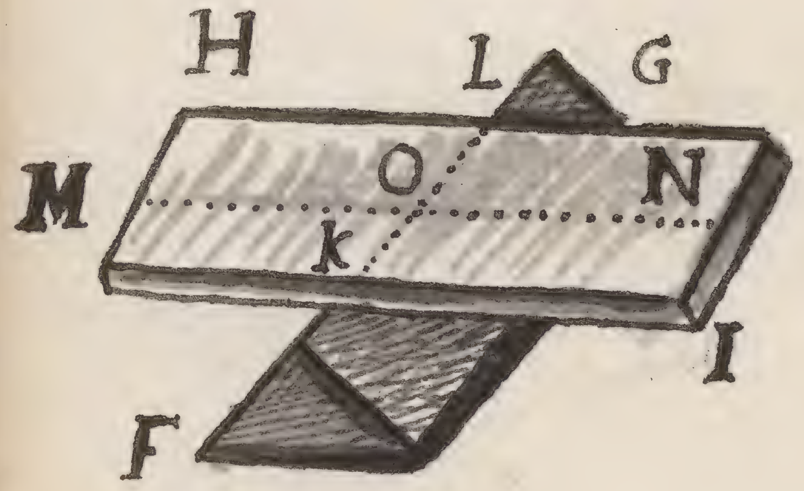


F. 21. Pag. 228.

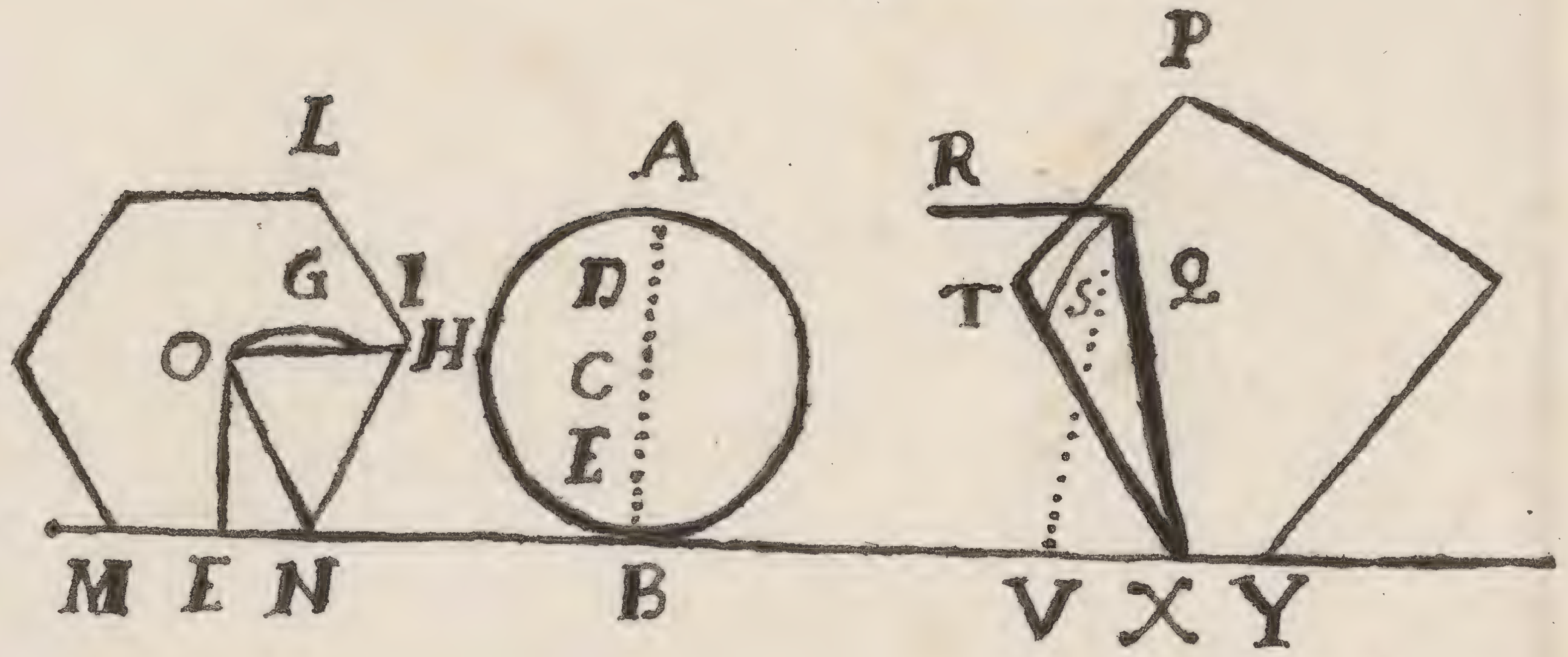


Tab: III.

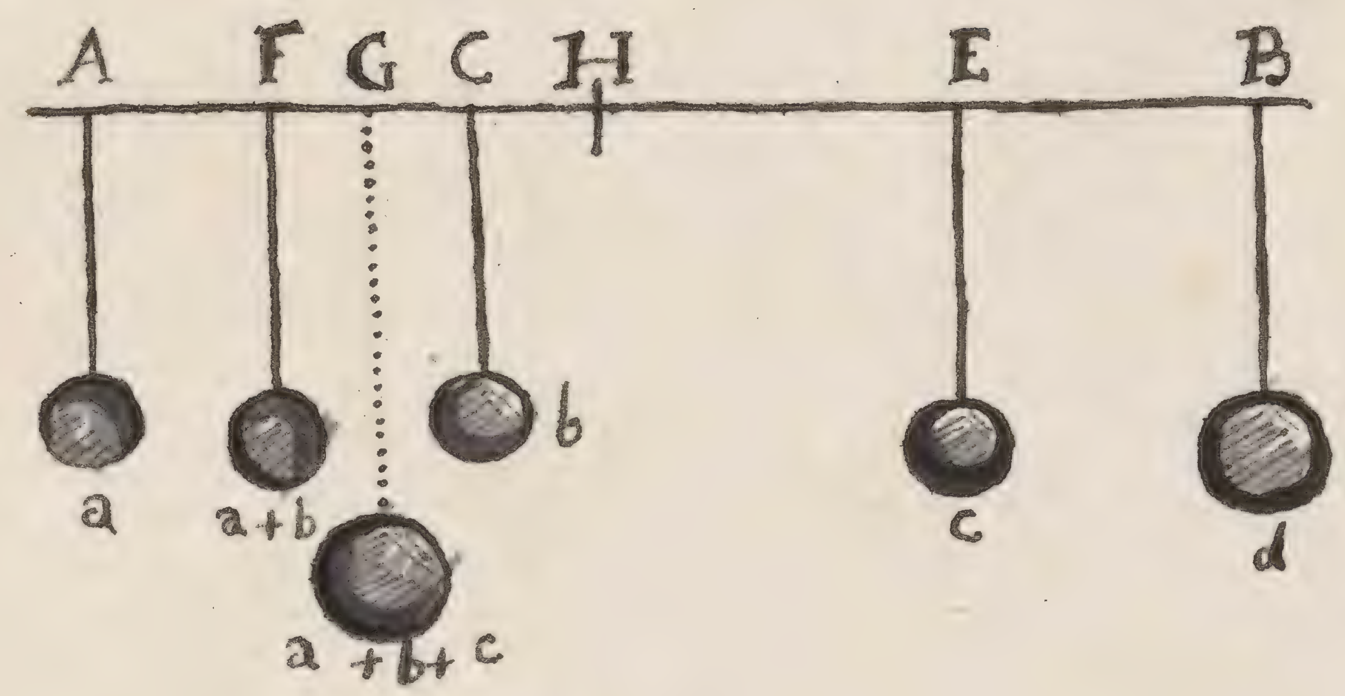
Tab. 3 F. 22 Pag. 231.



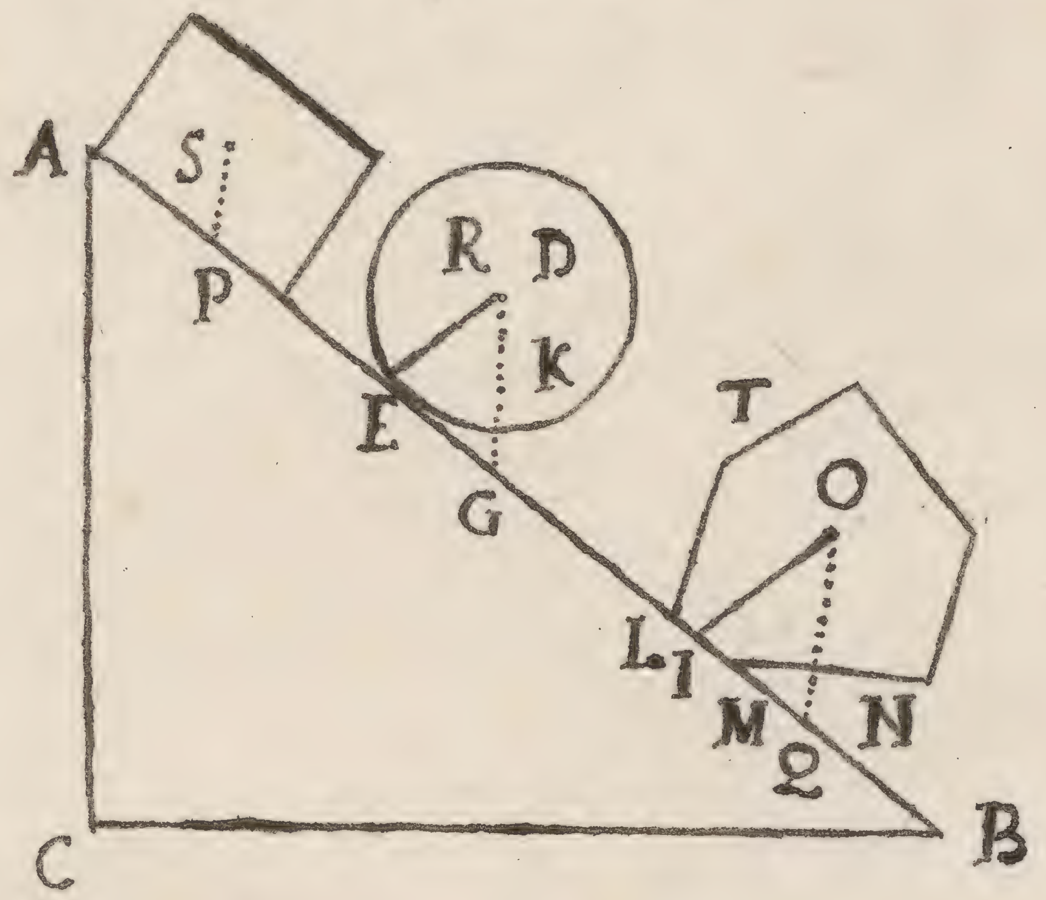
F. 23. Pag. 233.



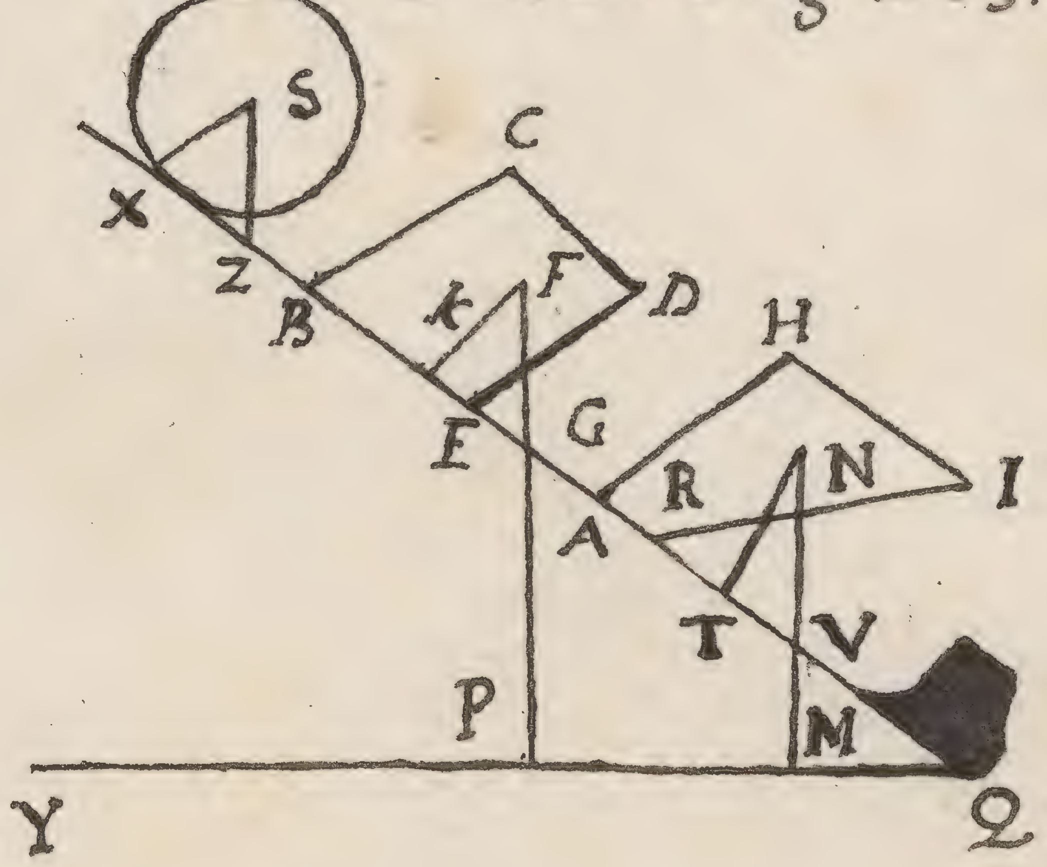
F. 24. Pag 231.



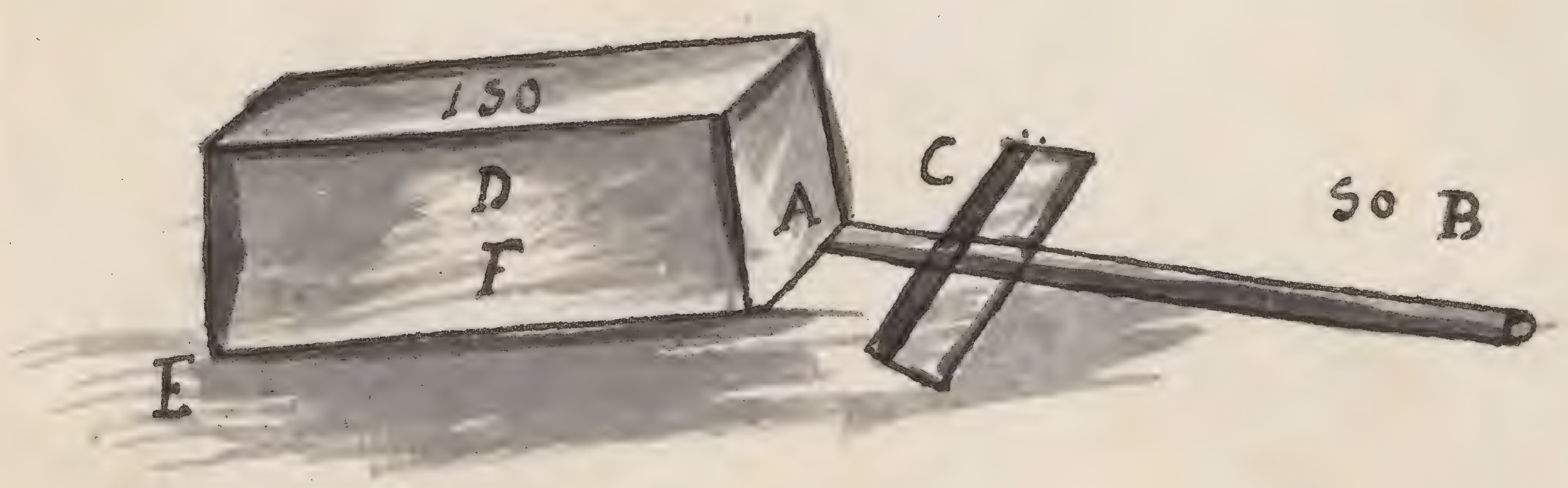
F. 25. Pag. 235.



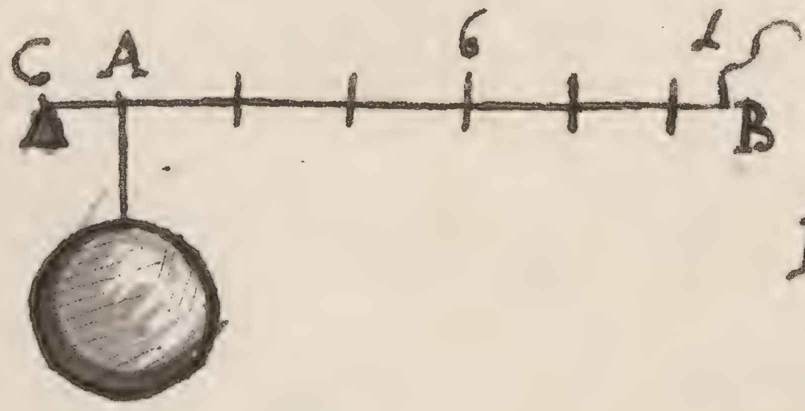
F. 26. Pag 235.



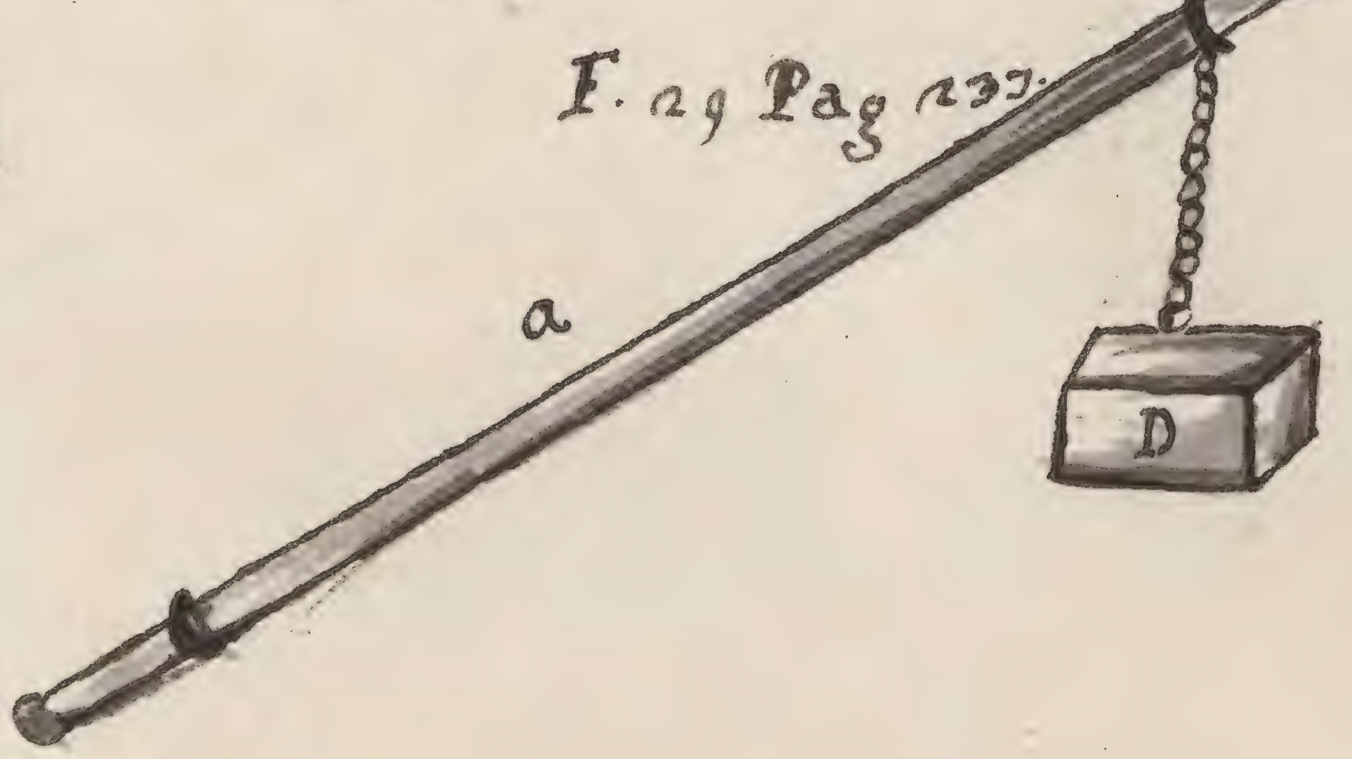
F. 27. Pag 236.



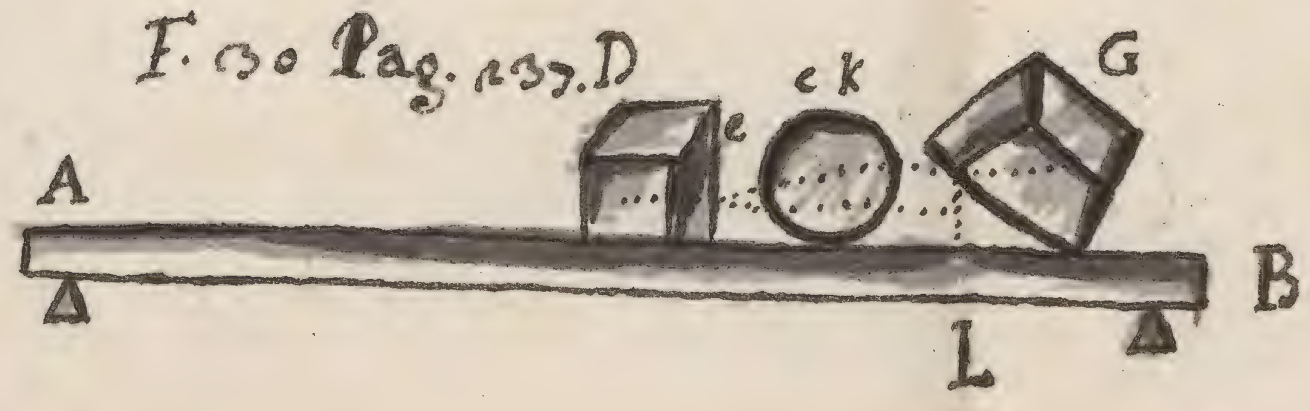
F. 28. Pag 237.



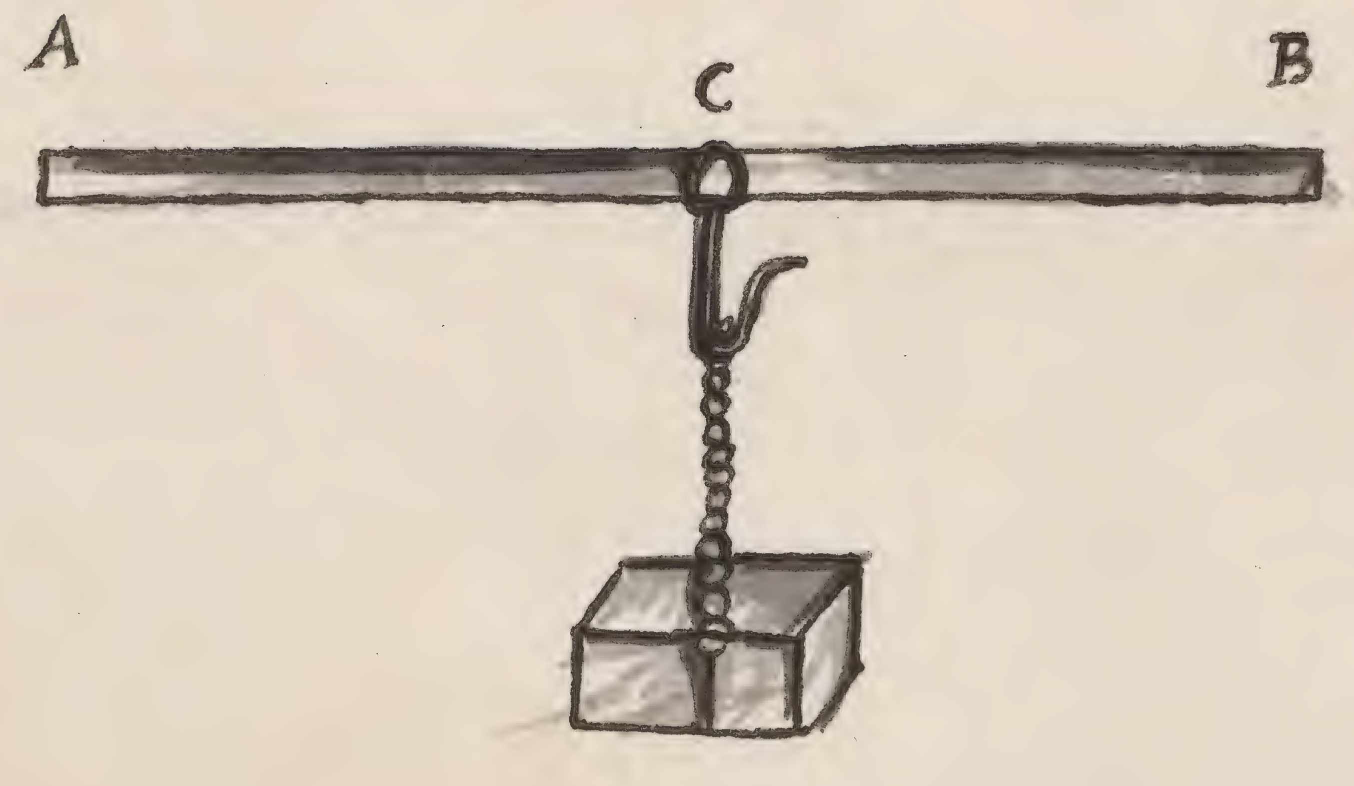
F. 29 Pag 237.



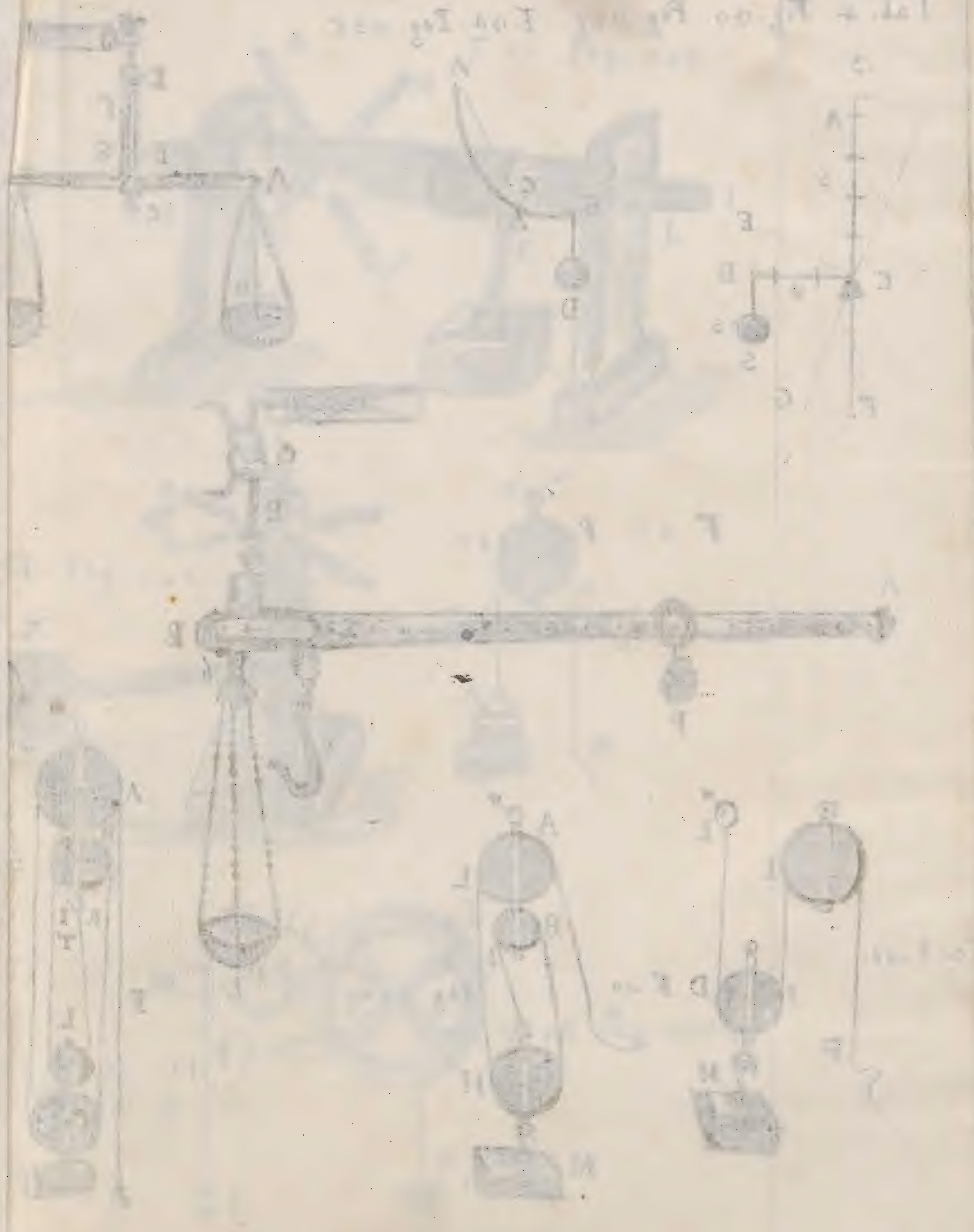
F. 30 Pag. 237.

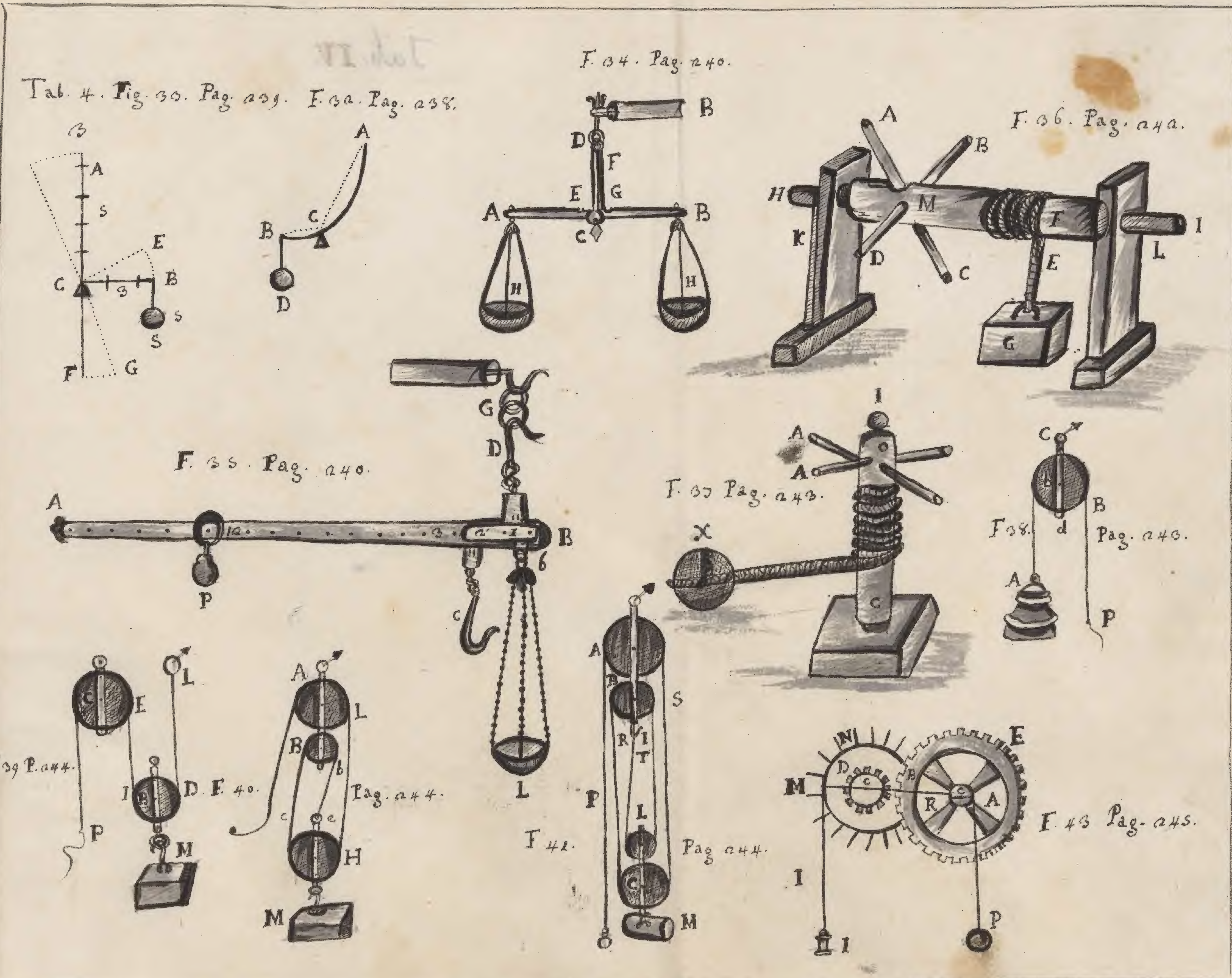


F. 31. Pag 237.

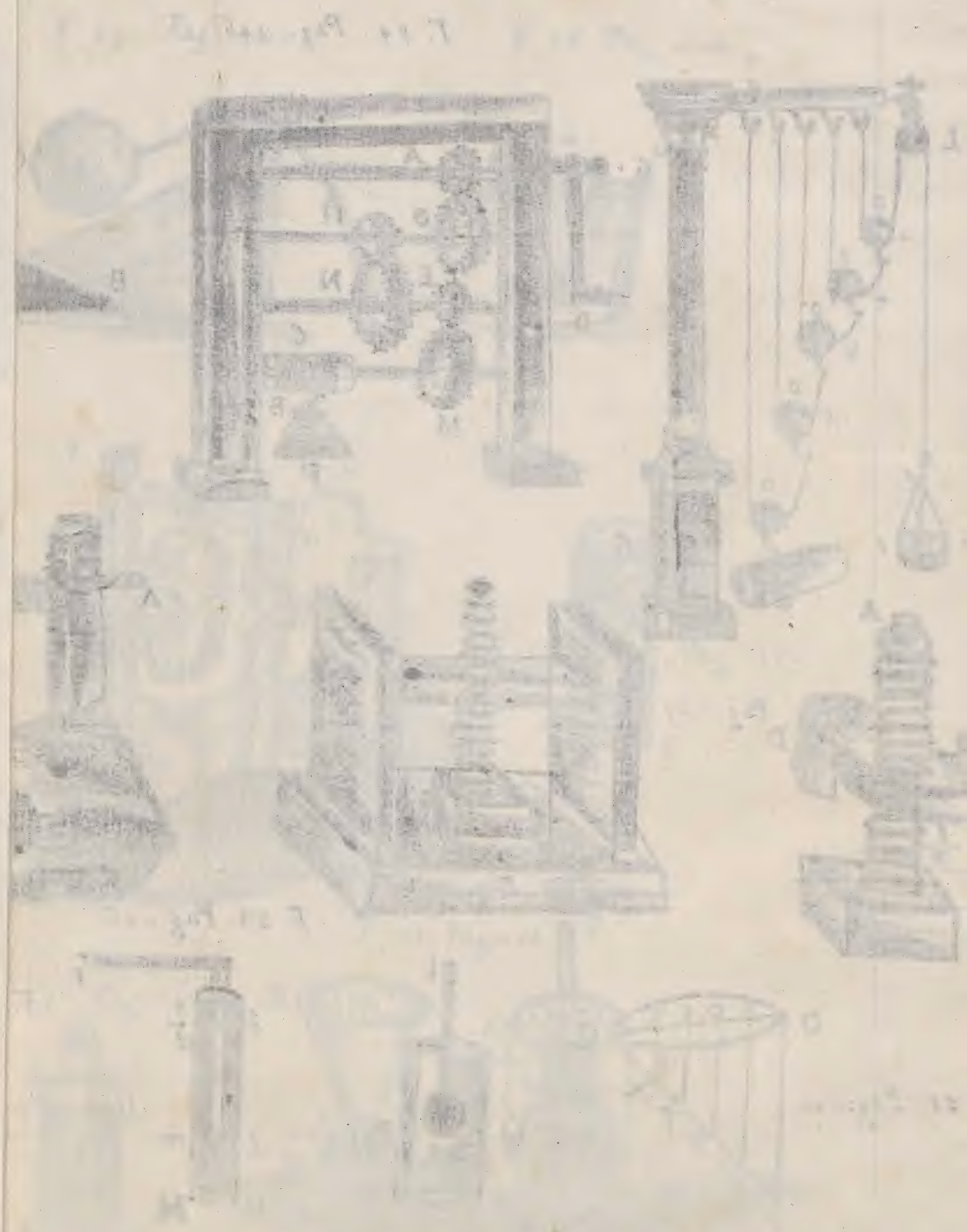


Tab: IV.

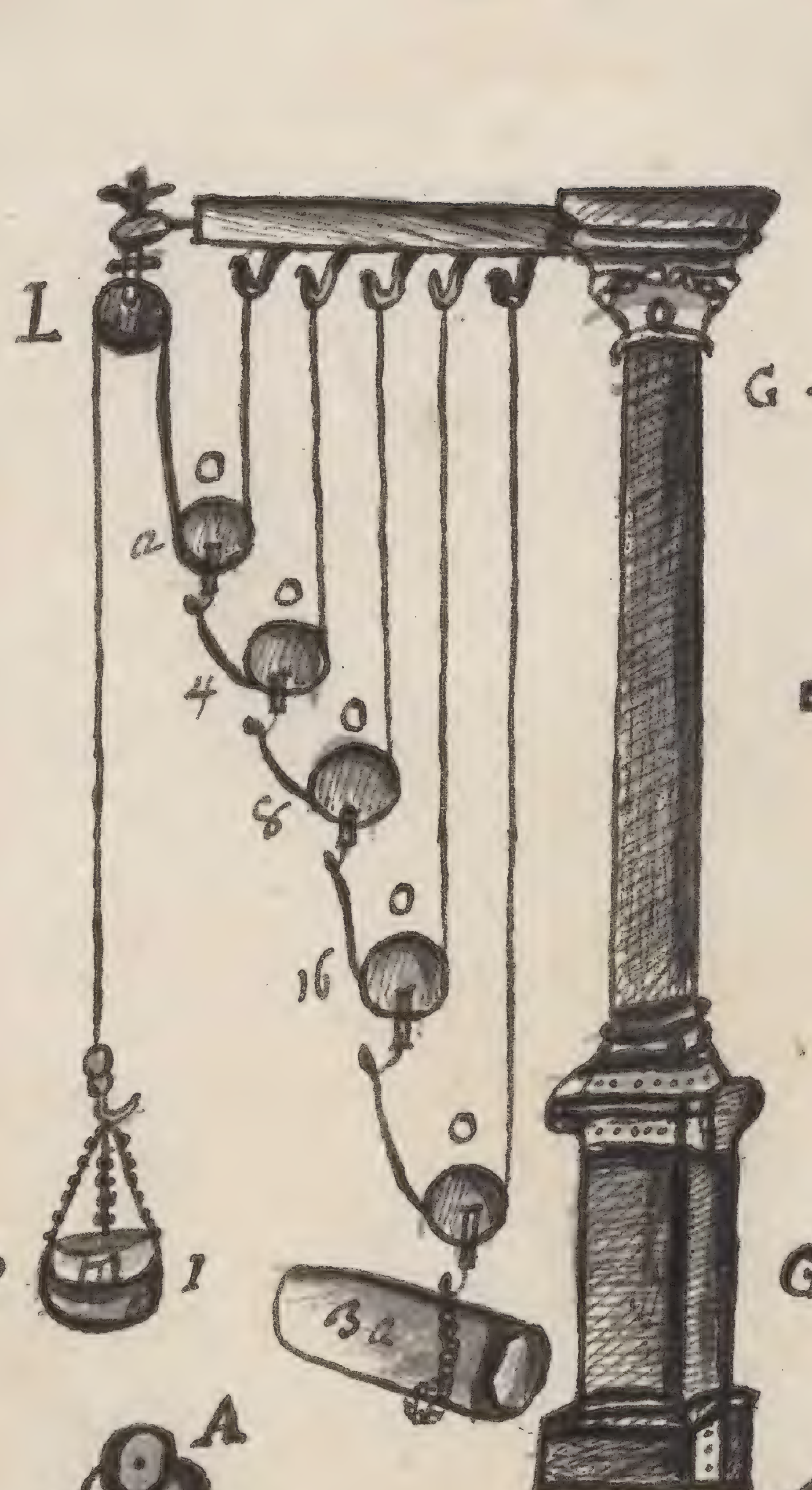



Tab. 4. Fig. 33. Pag. 239.
F. 32. Pag. 238.
F. 34. Pag. 240.
F. 35. Pag. 240.
F. 36. Pag. 242.
F. 37 Pag. 243.
F38. Pag. 243.
F.39 P. 244.
D. F. 40.
Pag. 244.
F 41.
Pag 244.
F. 43 Pag. 245.

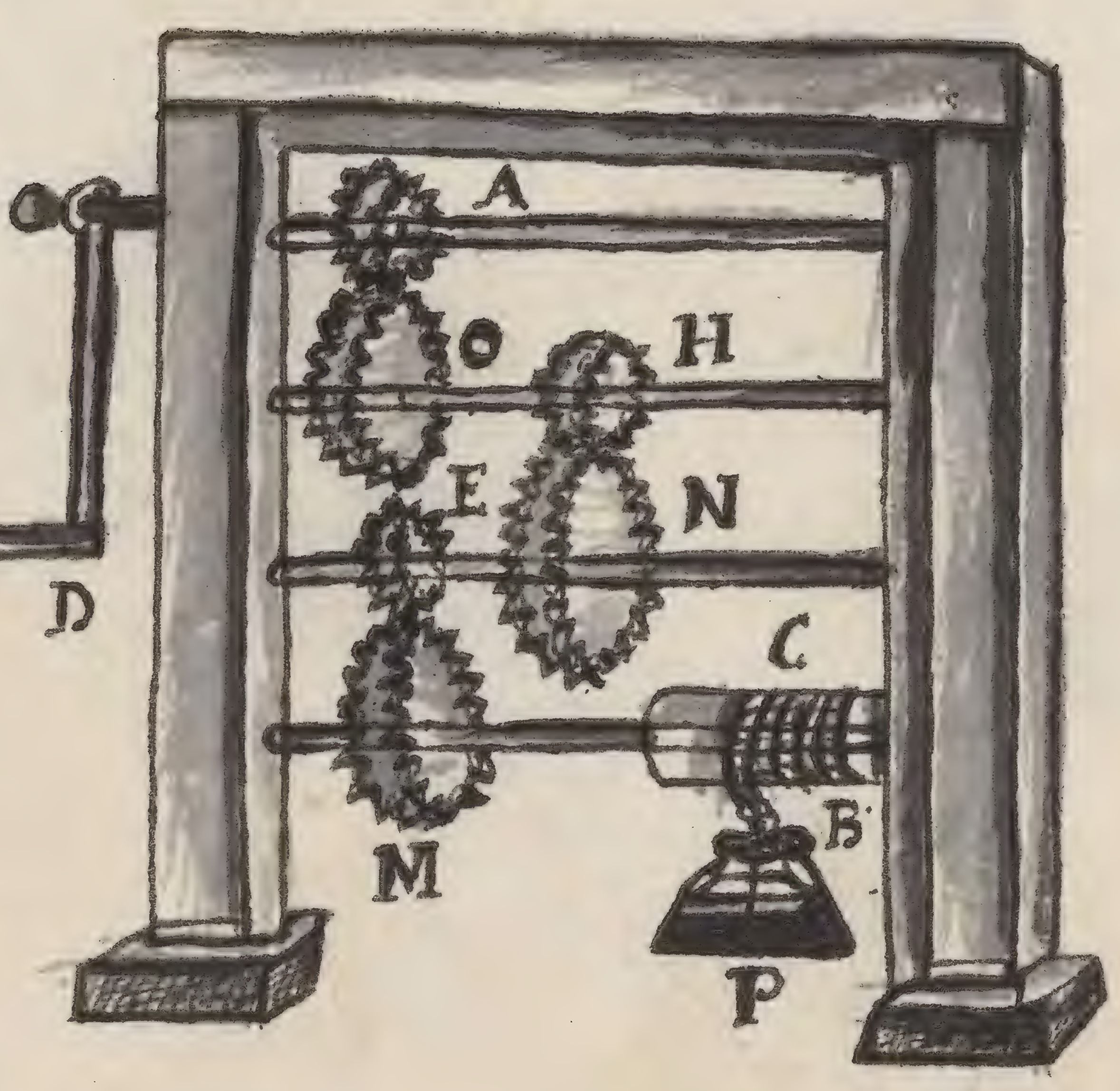
Tab: V.



Tab. 5. F. 42. Pag. 245.



F. 44. Pag. 246



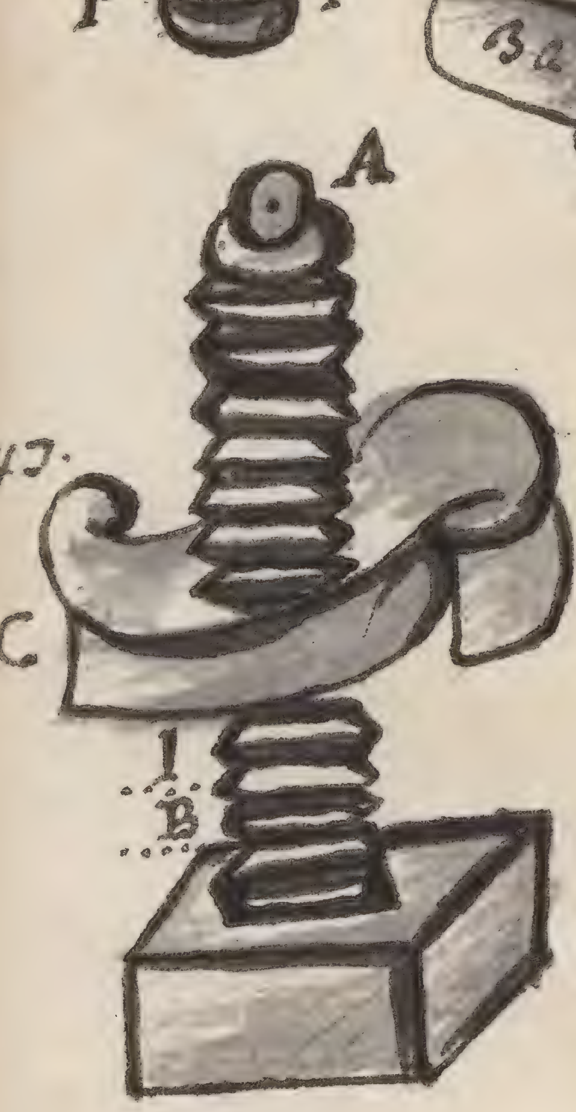
F. 45. Pag. 247.

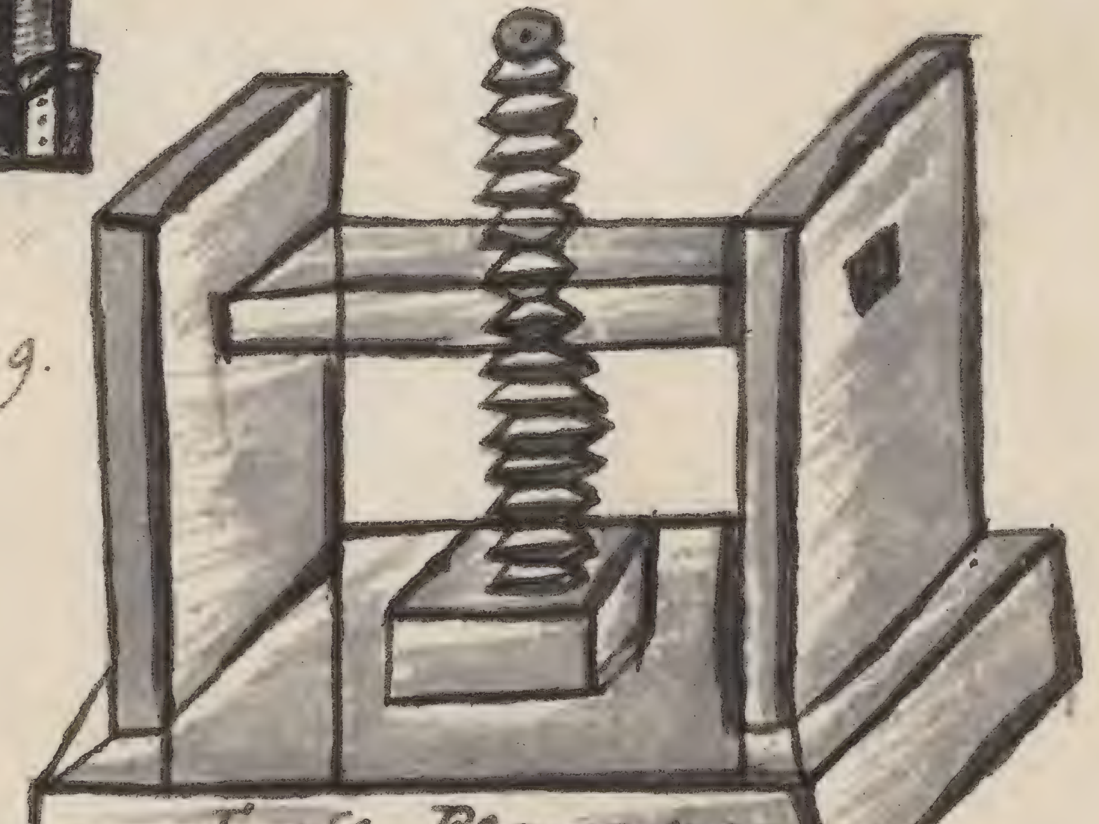


F. 46. Pag. 248.

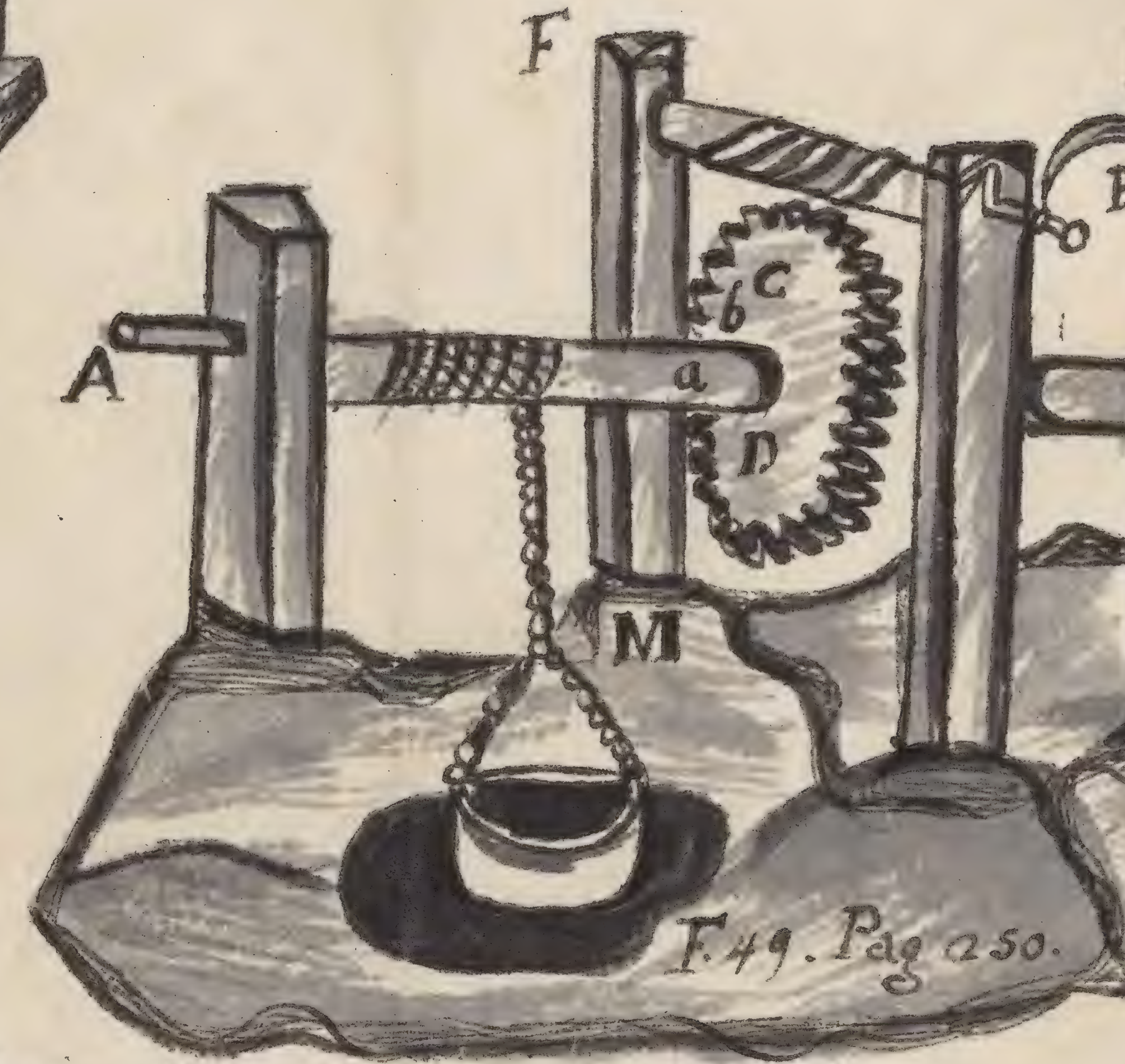


F. 47. Pag. 249.



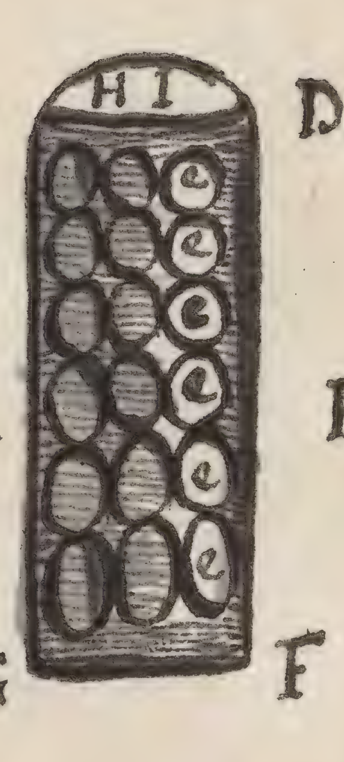


F. 48. Pag. 249.



F. 49. Pag. 250.

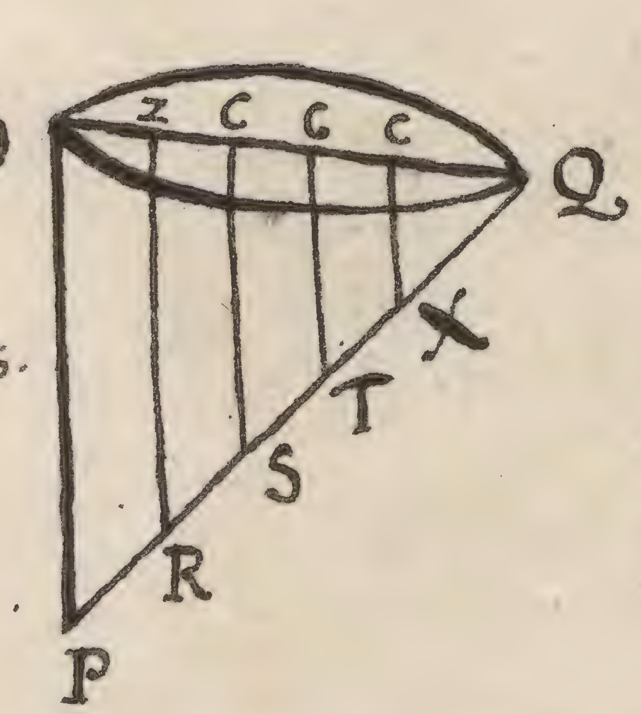
F. 50. Pag. 252.



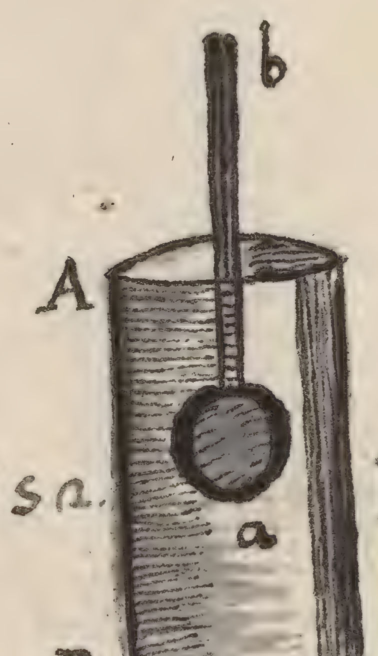
F. 53. Pag: 256.

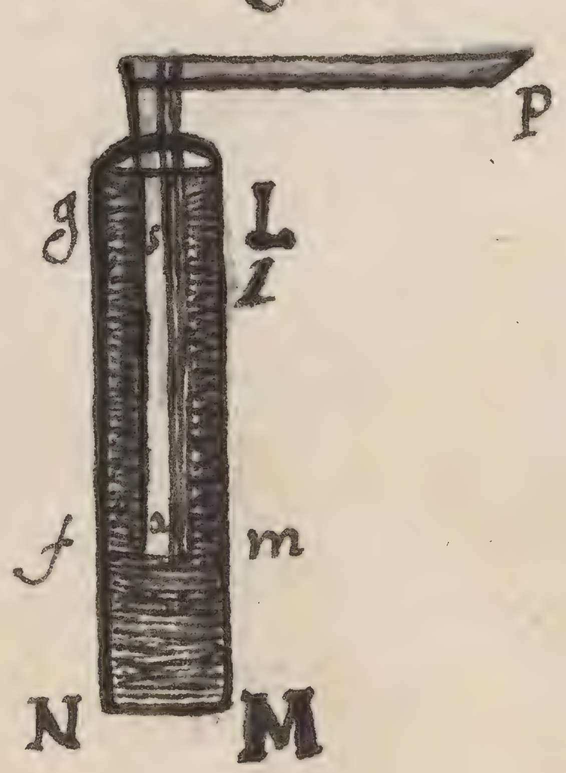
F. 55. Pag: 256.

F. 51. Pag: 255.



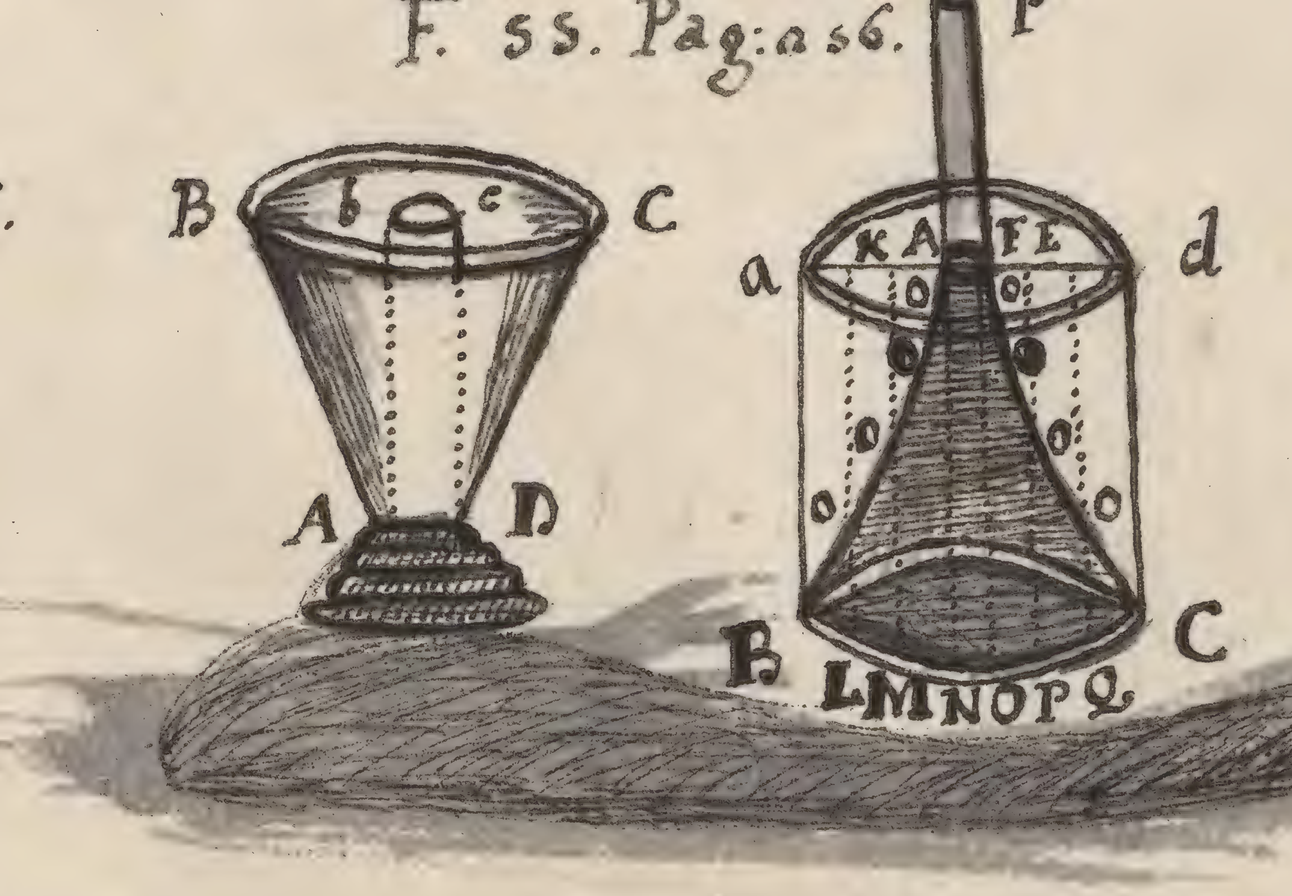
F. 52. Pag: 254.





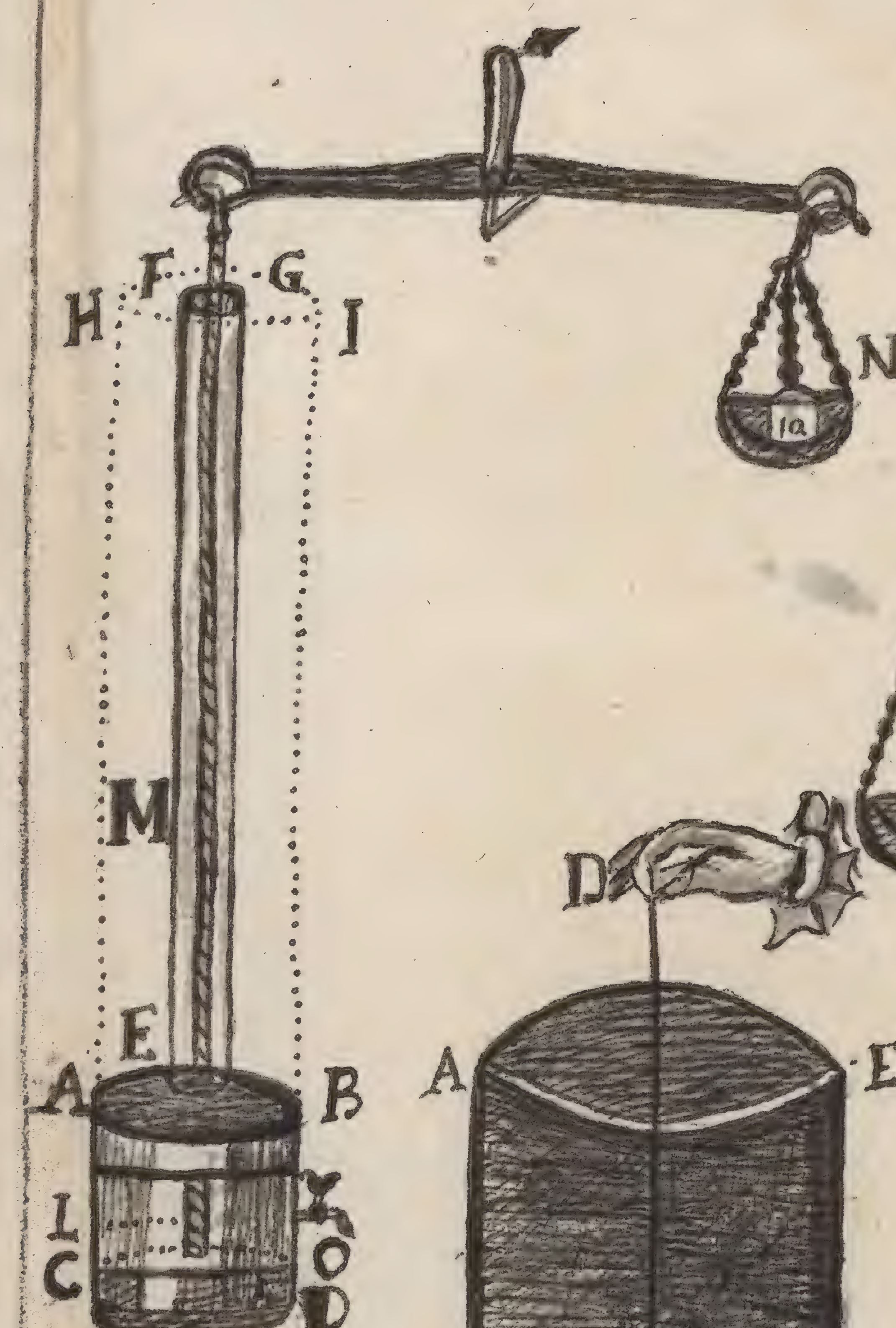
F. 54. Pag: 258.



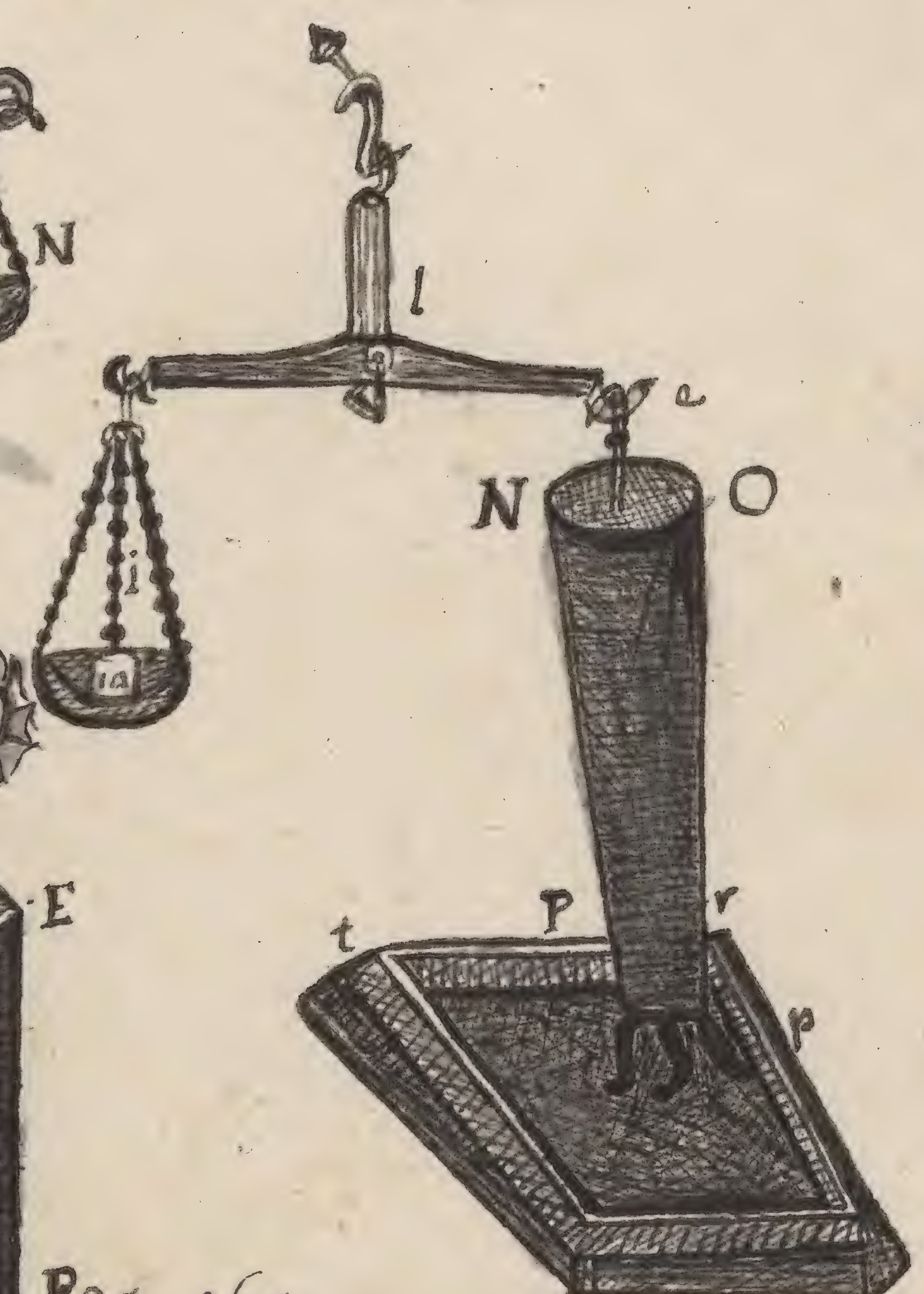


Tab: VI.

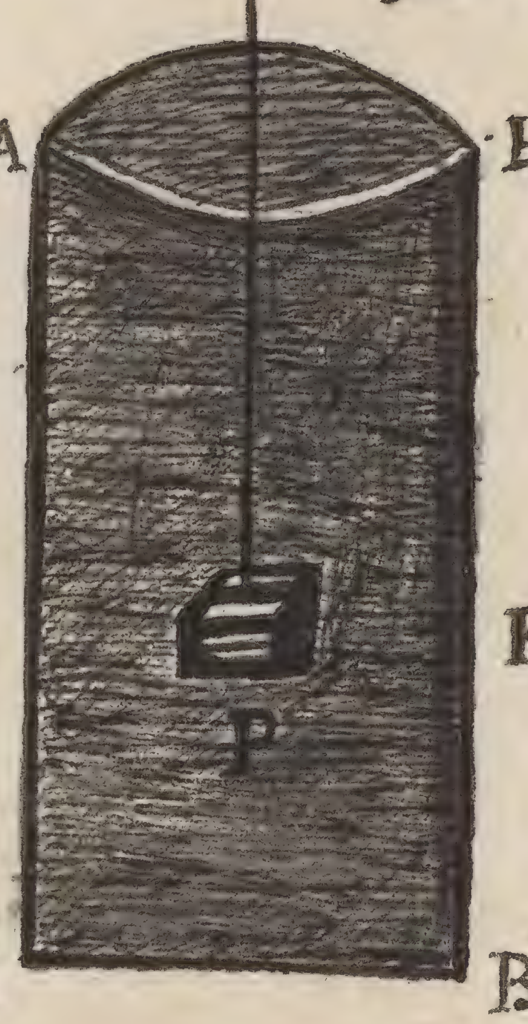
Tab. 6. F. 56. Pag: 257.



F. 57. Pag: 257.



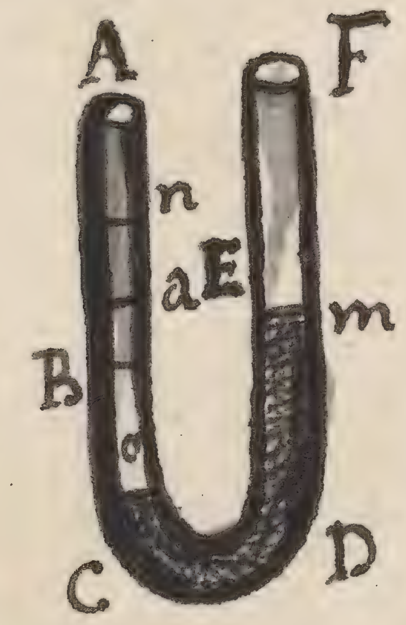
F. 61. Pag. 264.



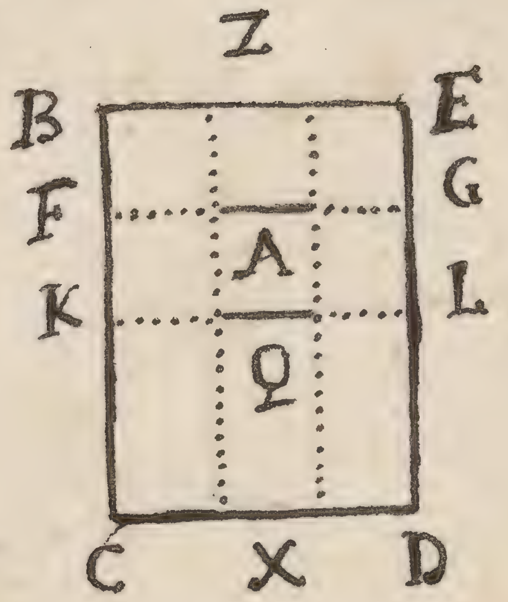
F. 58. Pag: 257.



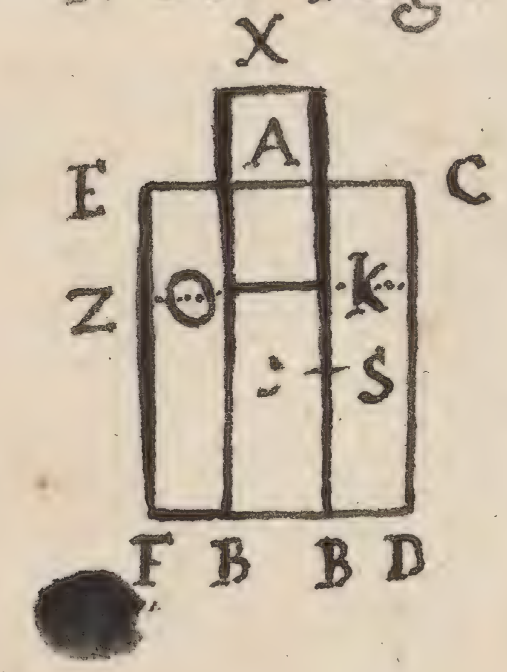
F. 59. Pag: 259.



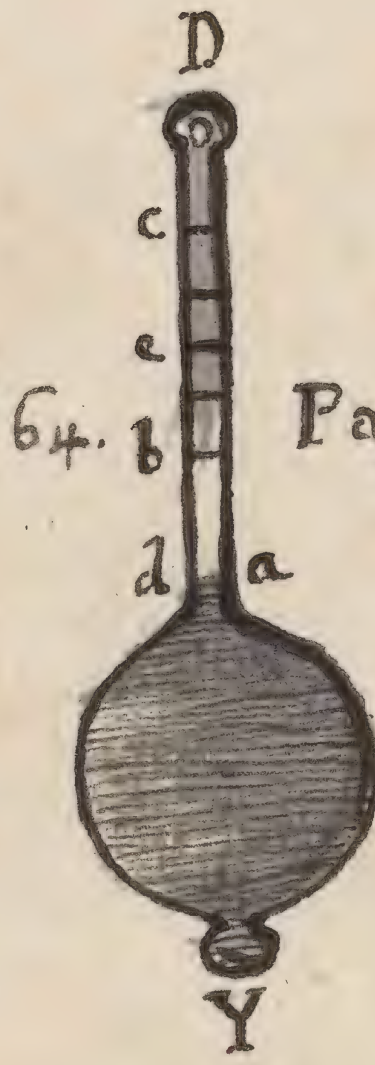
F. 60. Pag: 262.



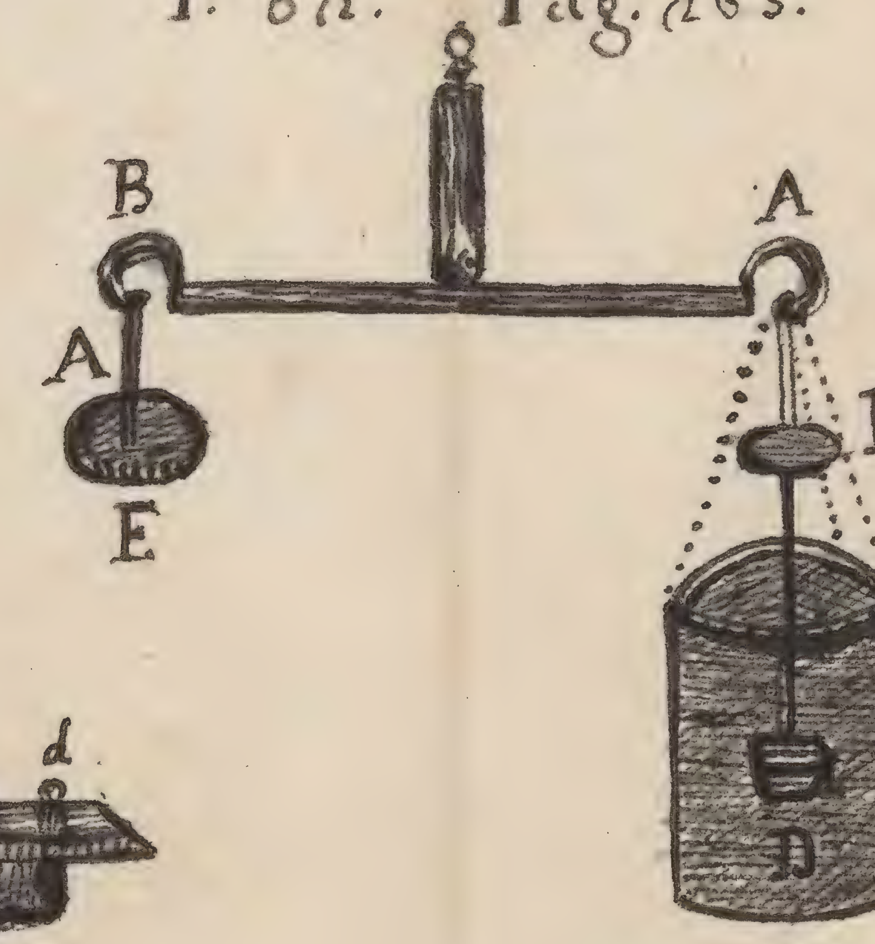
F. 63. Pag: 267.



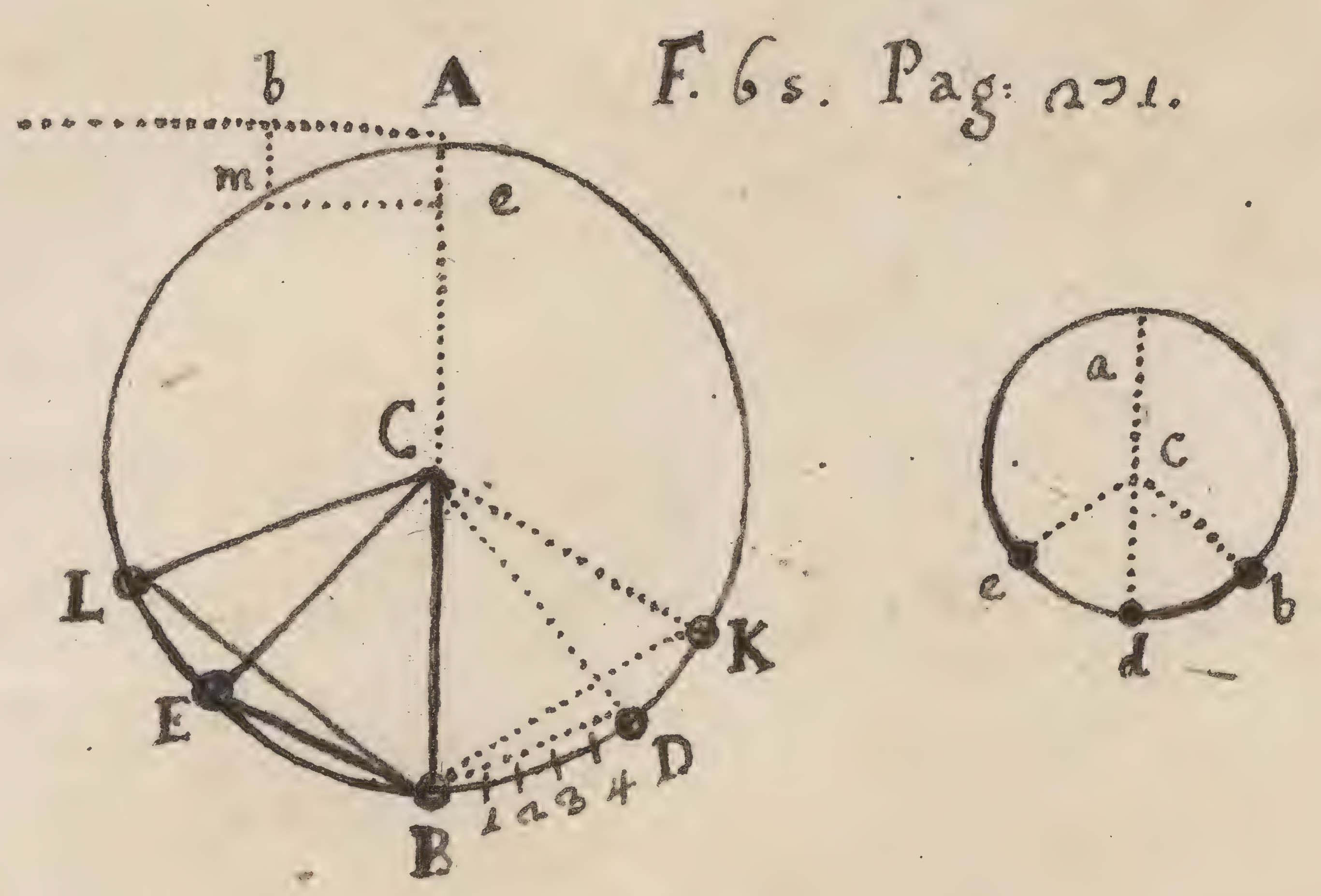
F. 64. Pag: 266.



F. 62. Pag: 265.



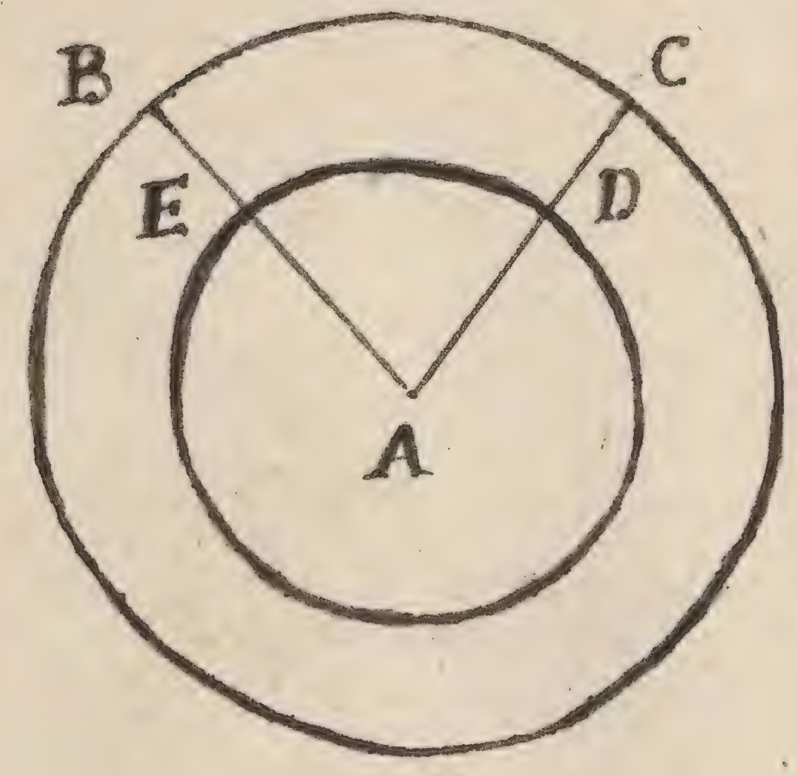
F. 65. Pag: 271.



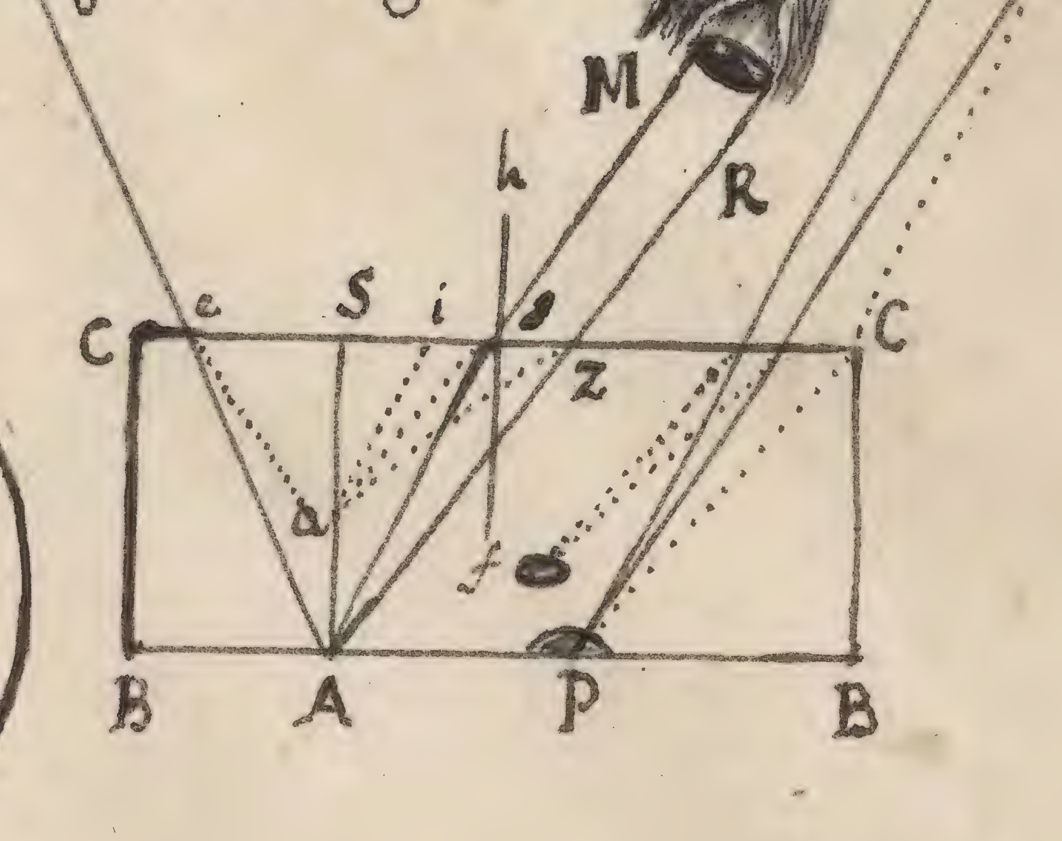
F. 66. Pag: 274.



F. 67. Pag: 290.

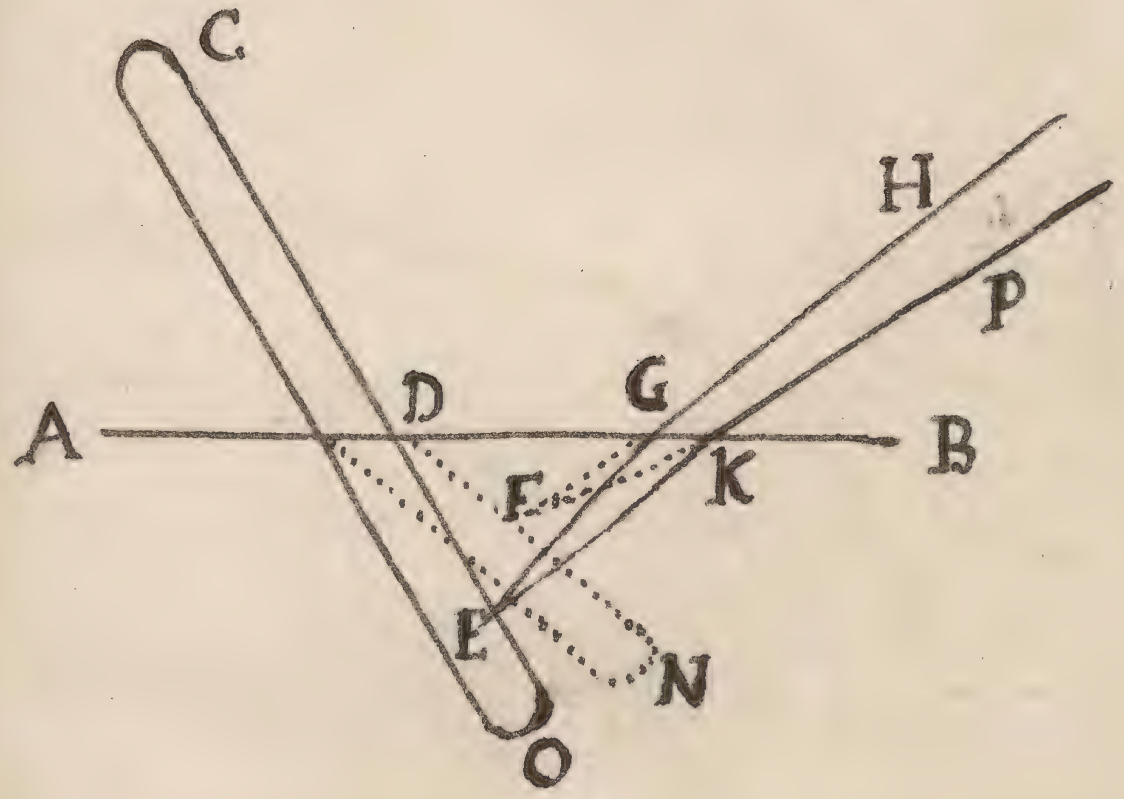


F. 68. Pag. 301.

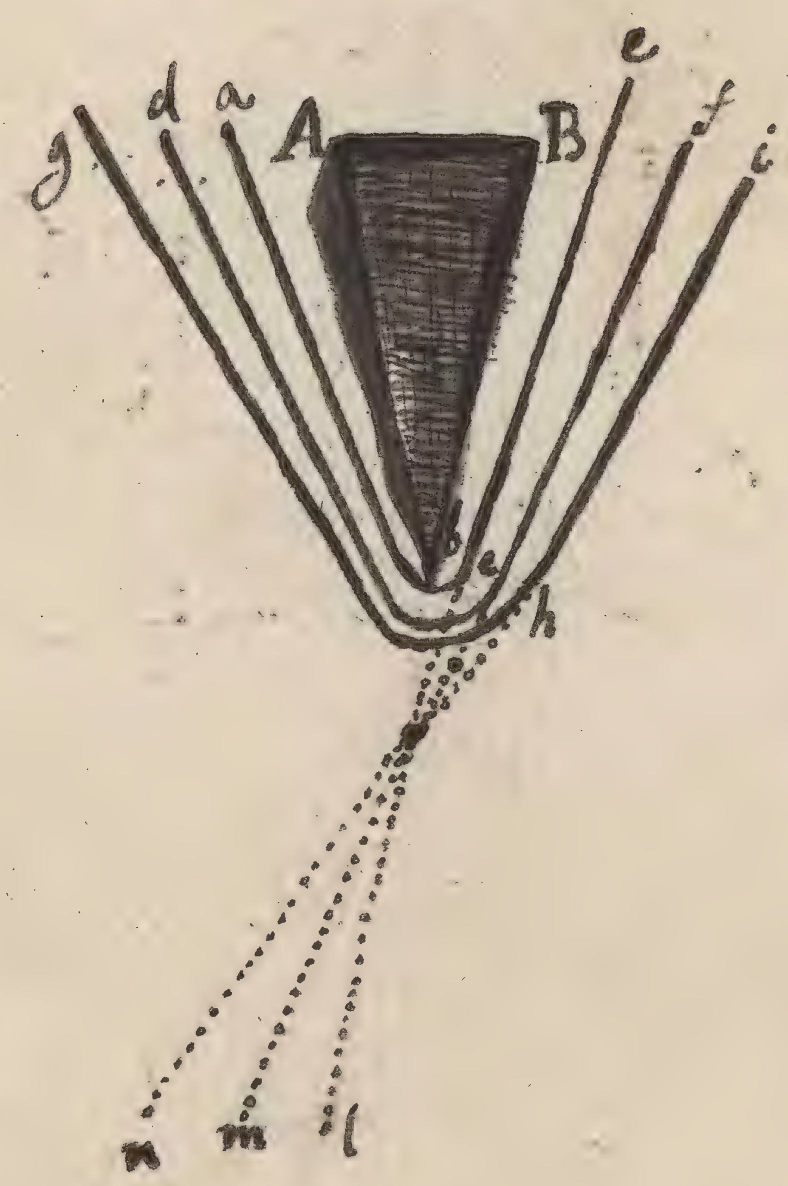


Tab: VII.

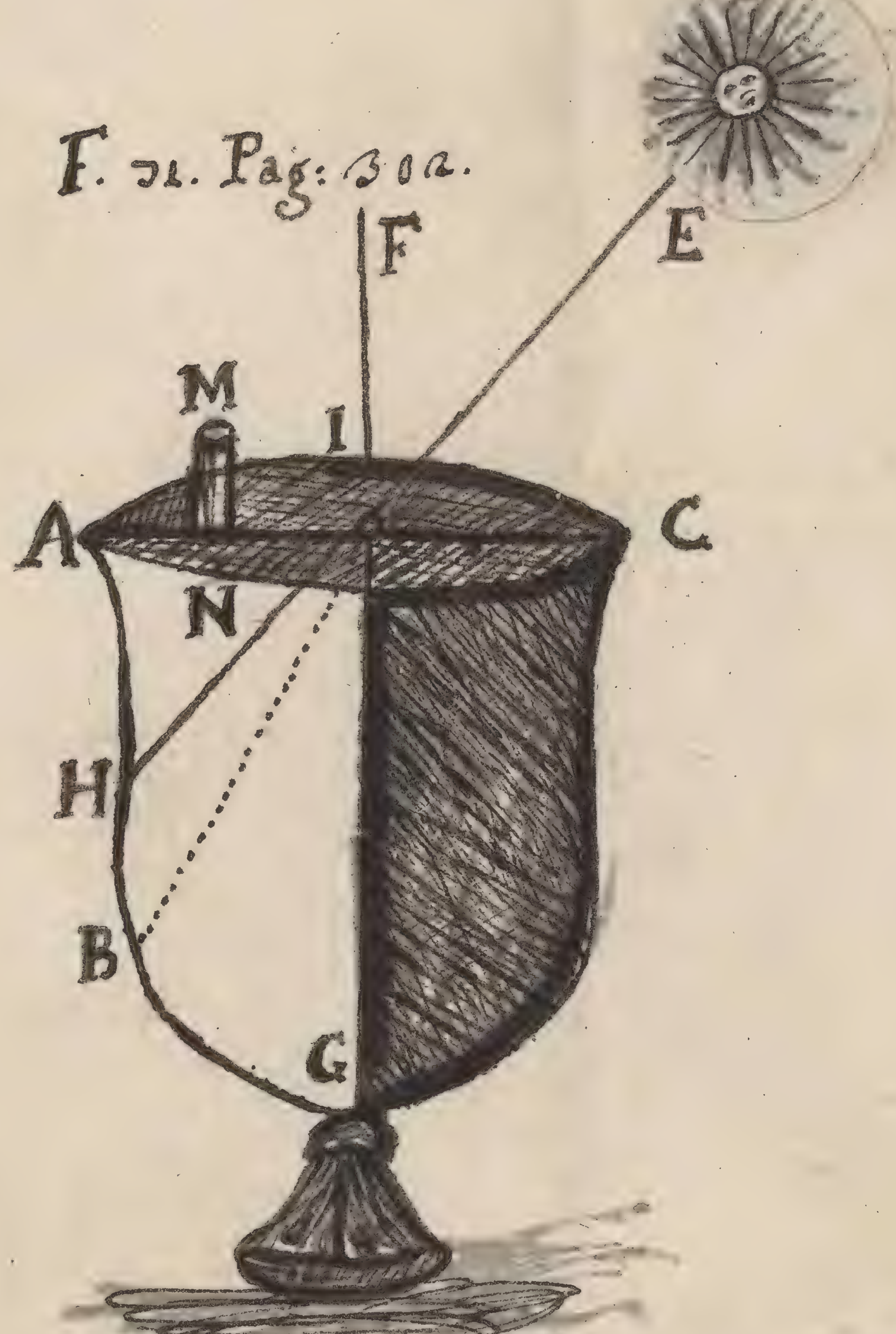
Tab. 7. F. 69. Pag: 302.



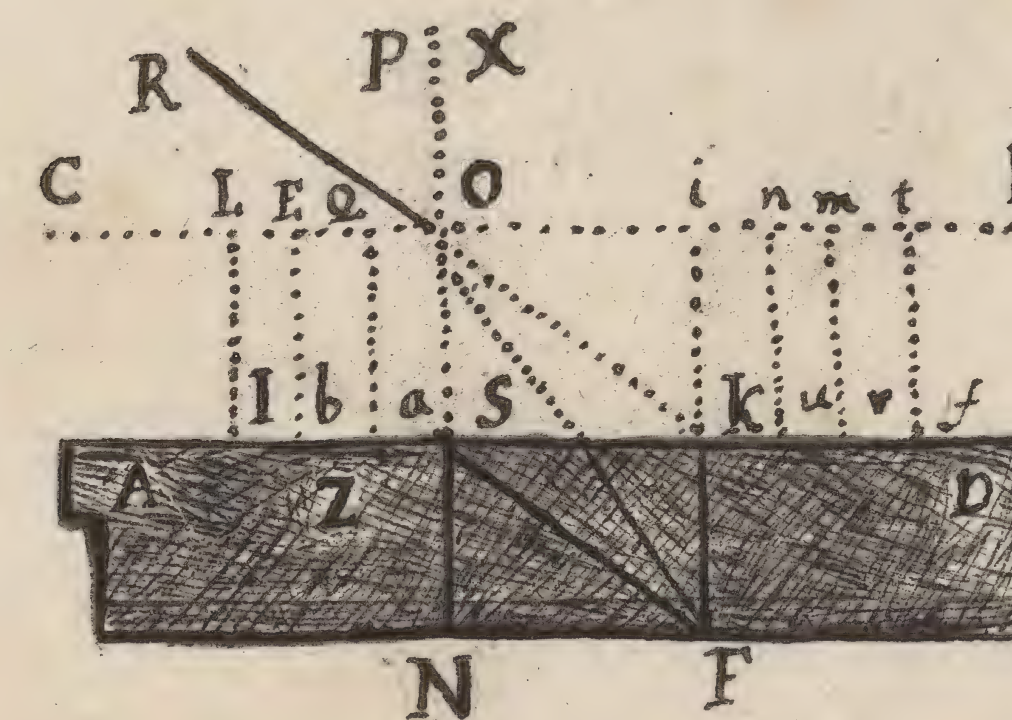
F. 70. Pag: 302.



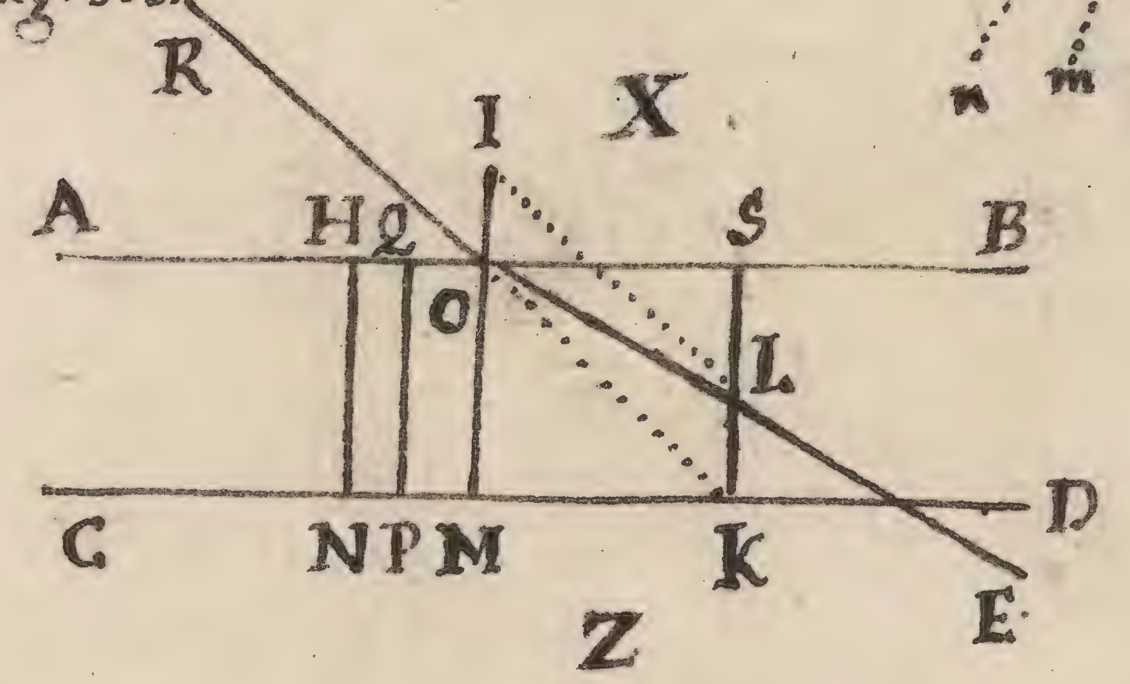
F. 71. Pag: 302.



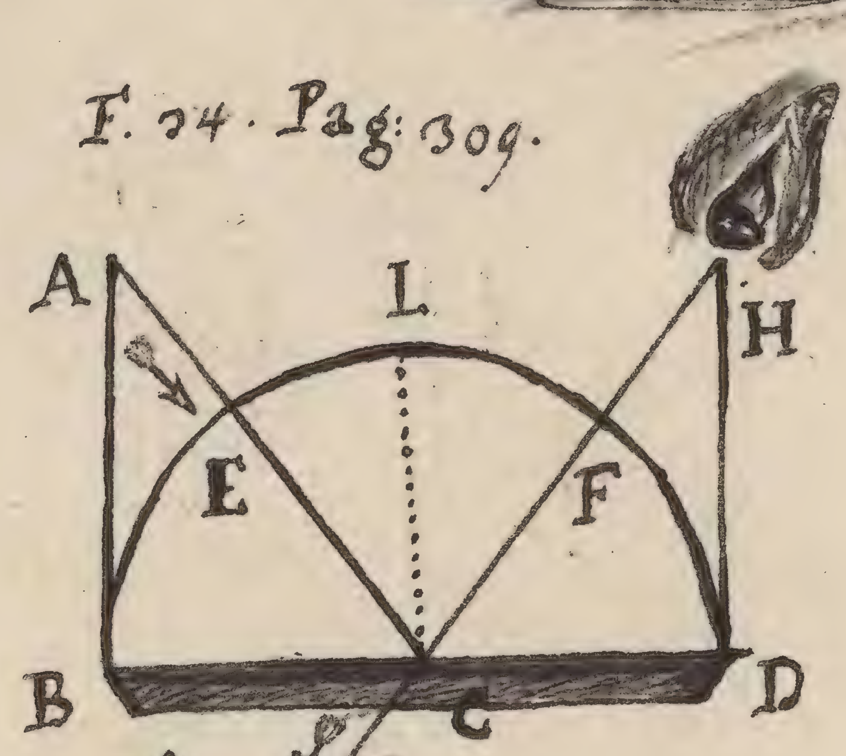
F. 72. Pag: 304.



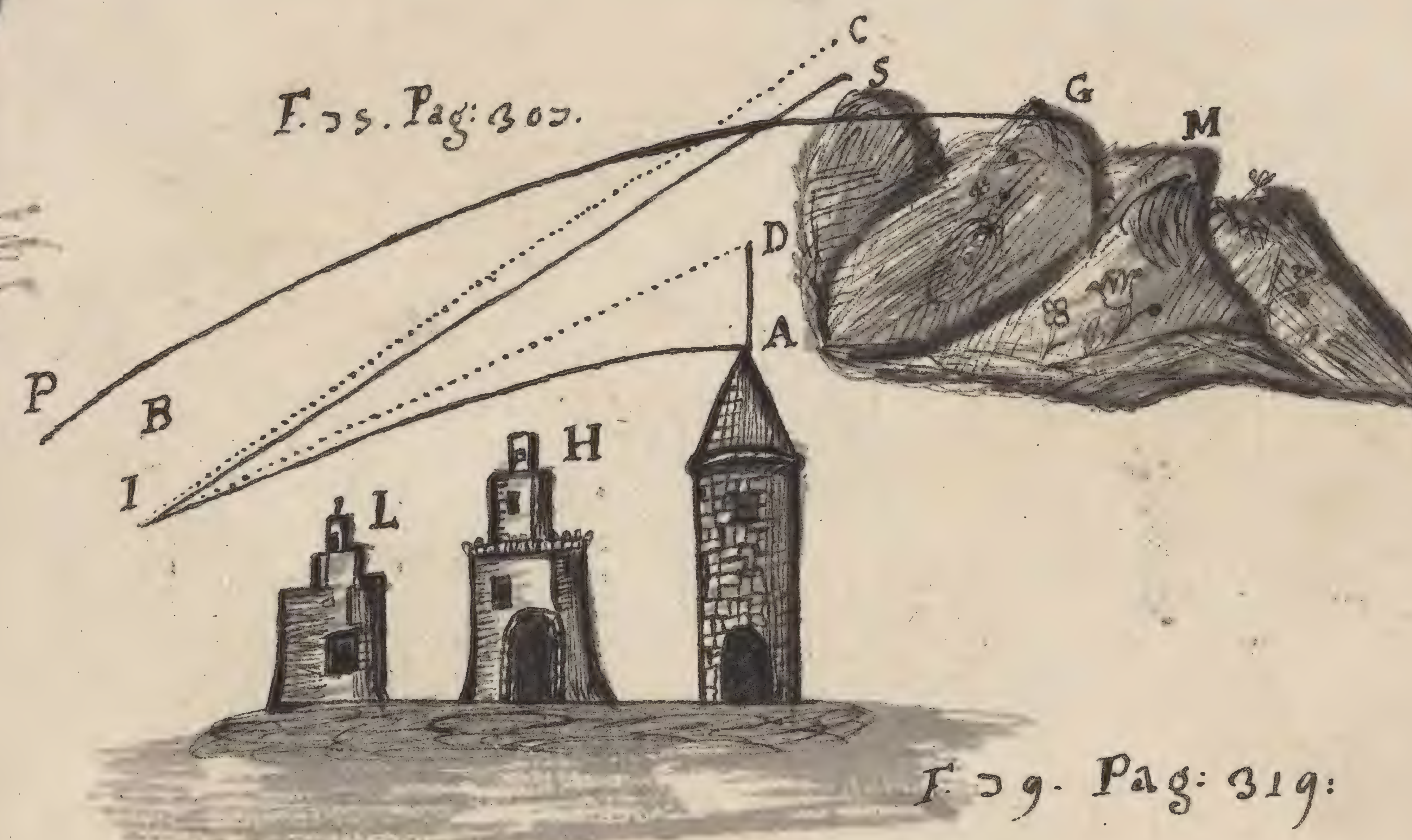
F. 73. Pag: 305.



F. 74. Pag: 309.

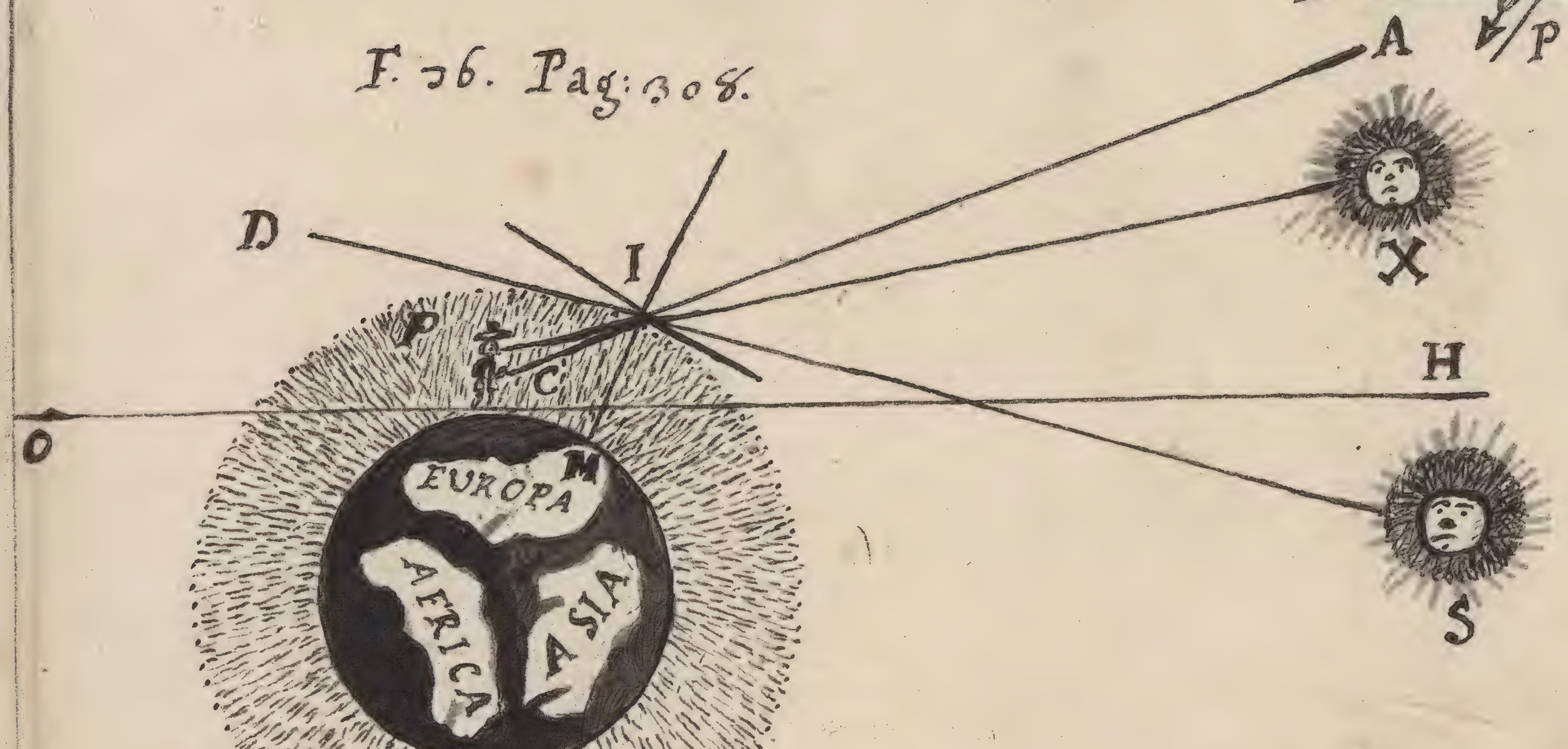


F. 75. Pag: 307.

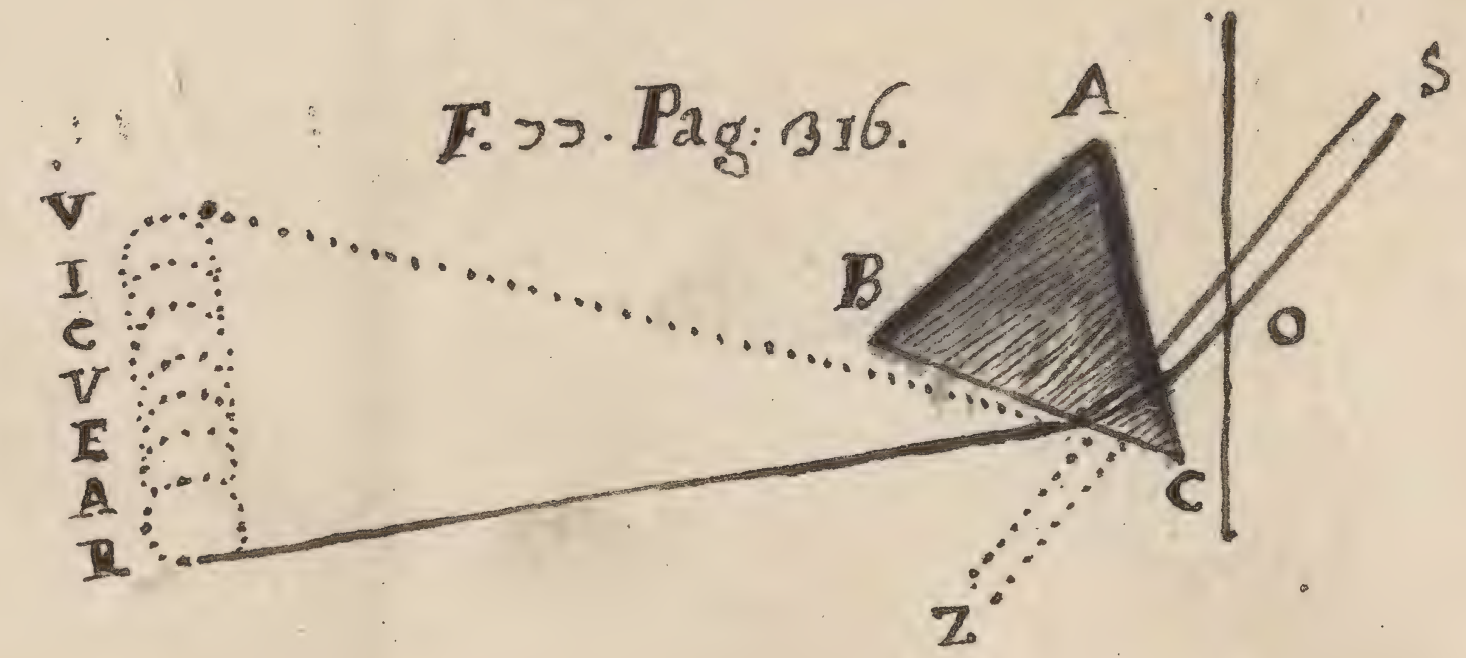


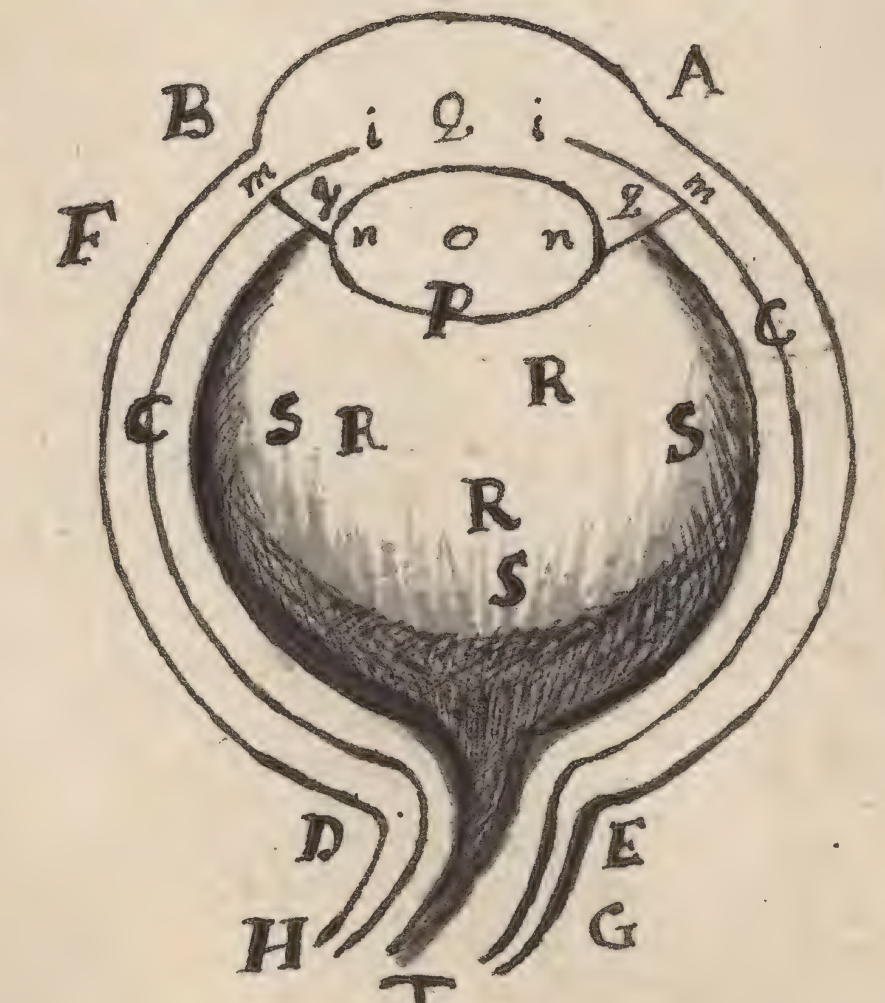
F. 79. Pag: 319.

F. 76. Pag: 308.



F. 77. Pag: 316.



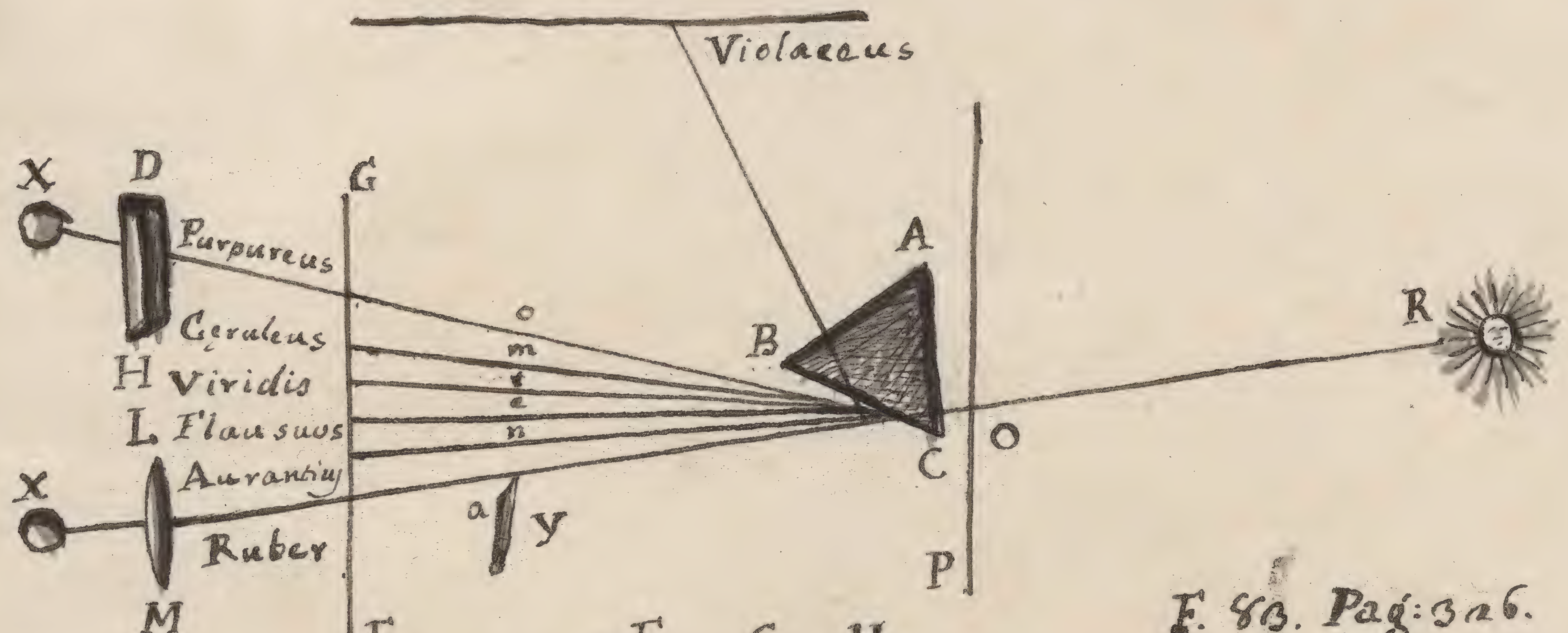


Tab: VIII.

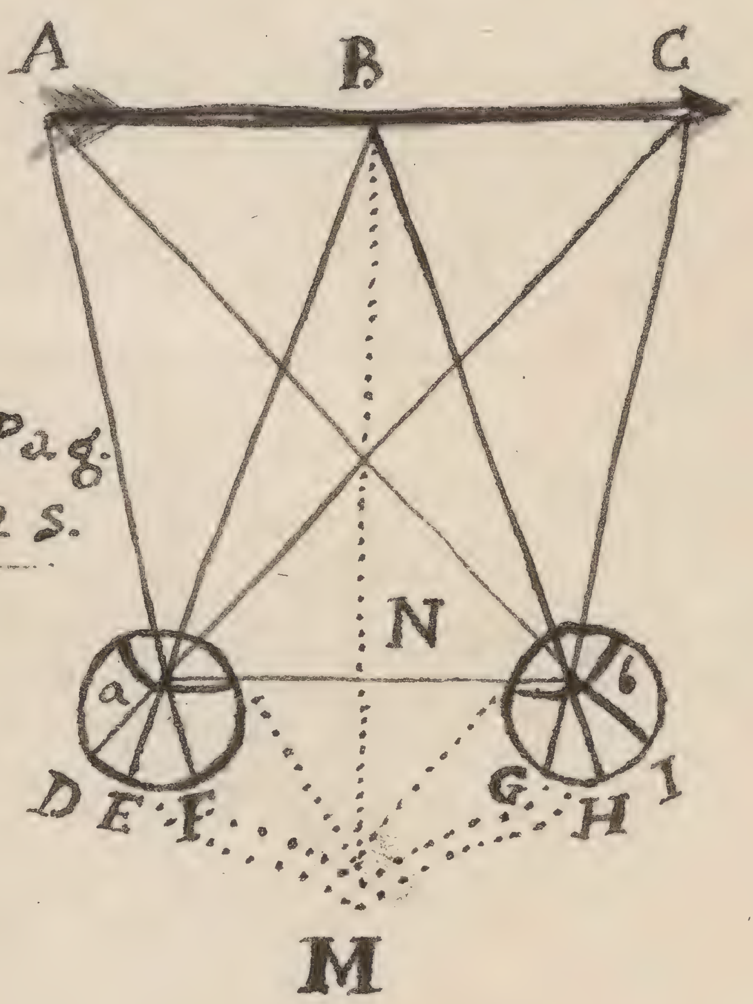
Tab. 8.

Tab VIII

F. 78. Pag: 317.



F. 81. Pag. 325.



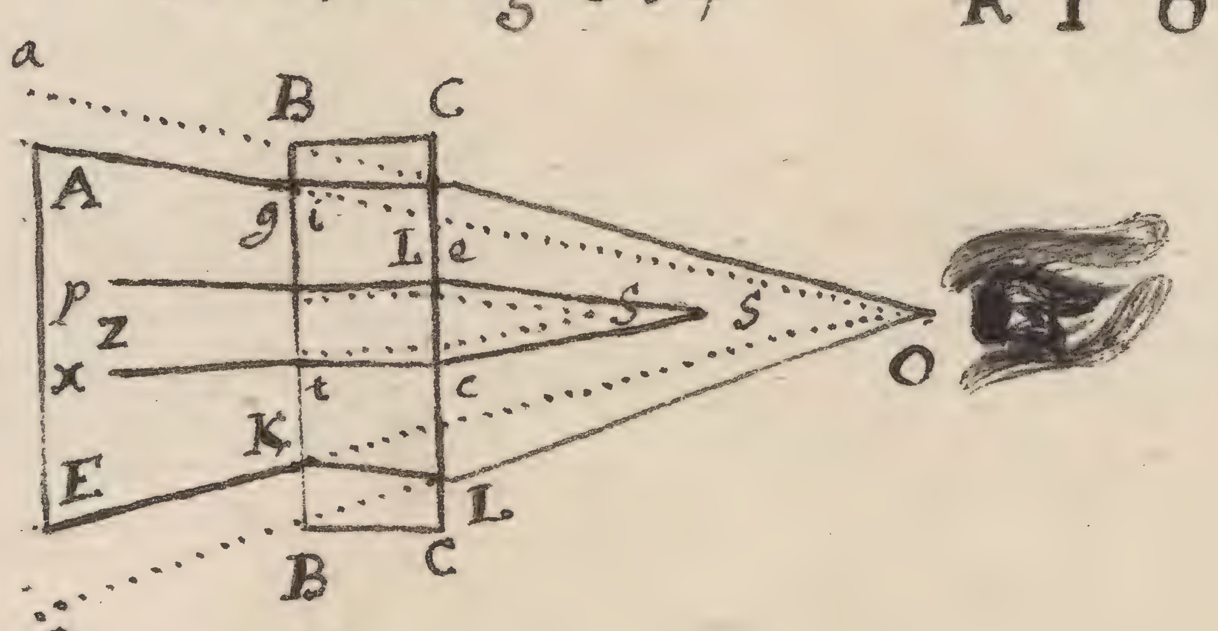
F. 82. Pag:



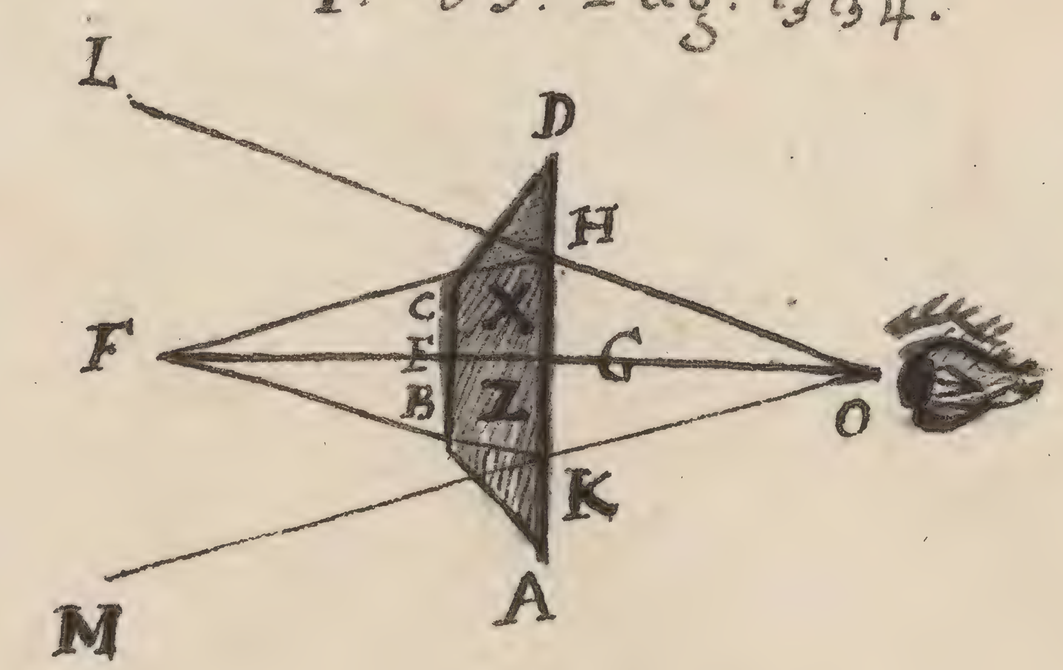
F. 83. Pag: 326.



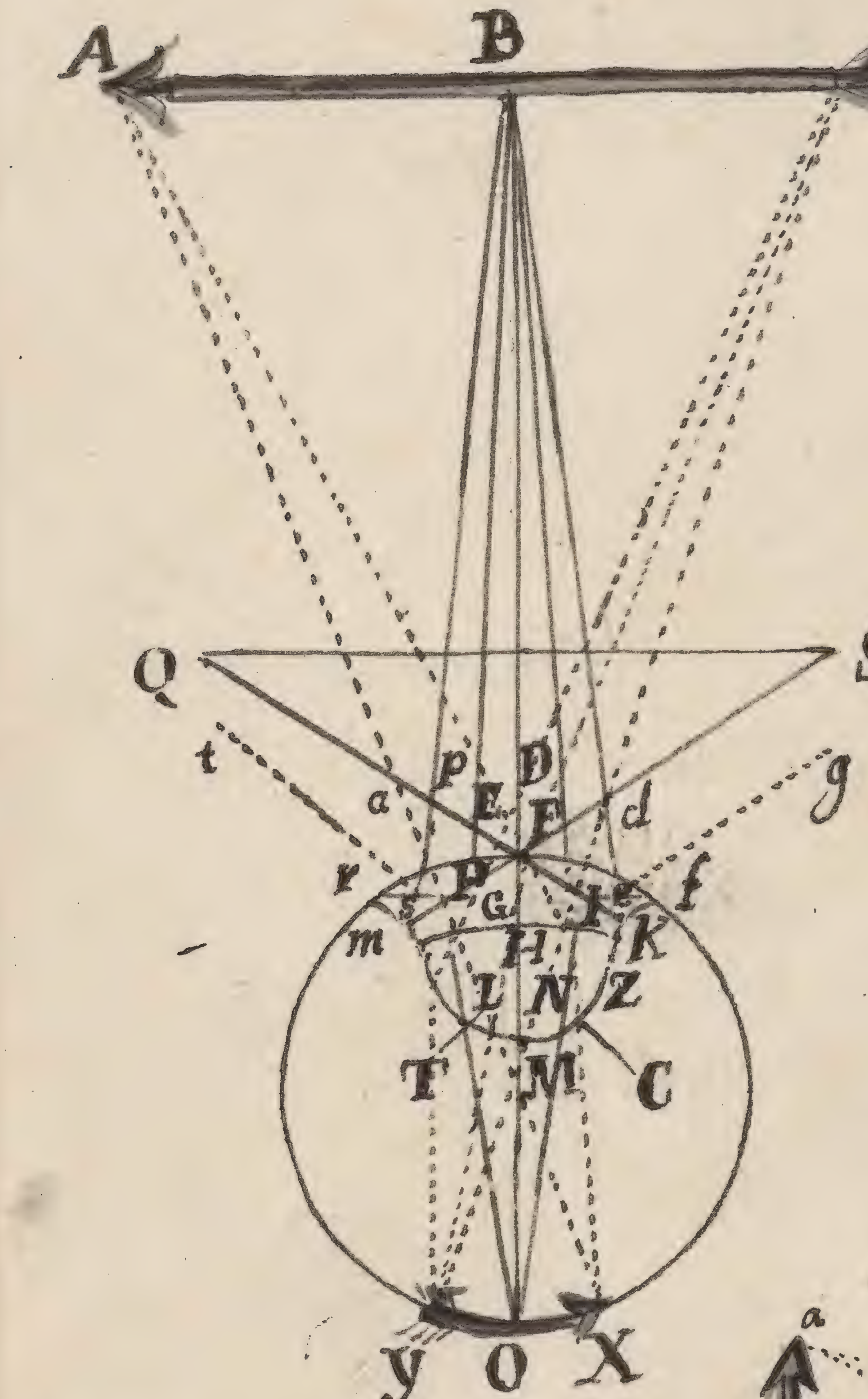
F. 84. Pag: 334.



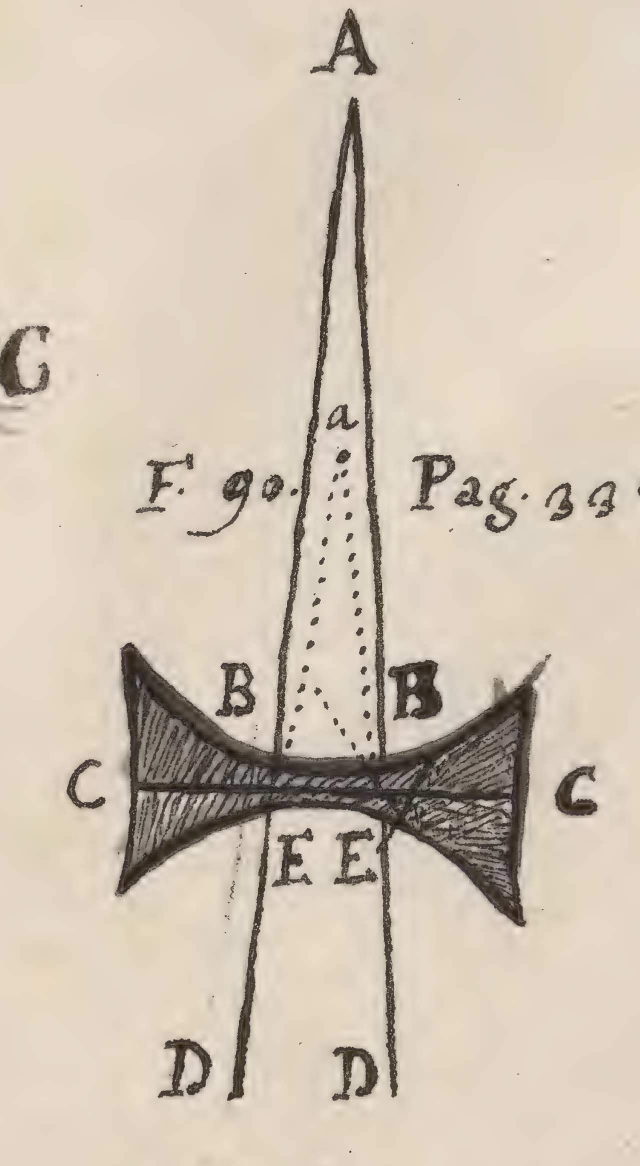
F. 85. Pag. 334.



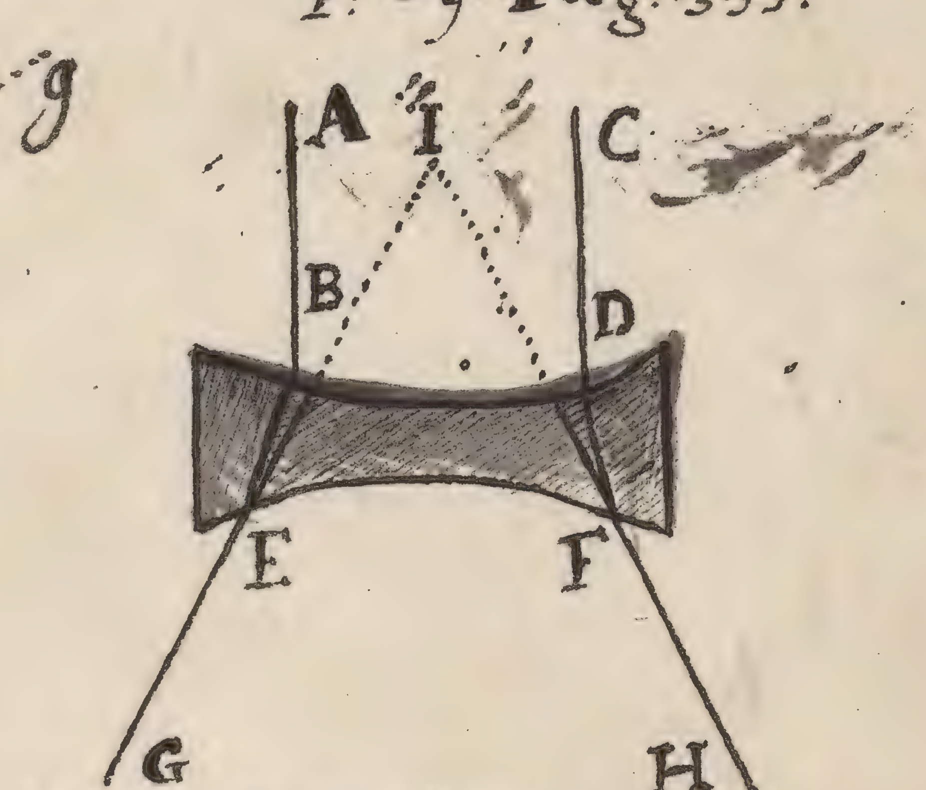
F. 80. Pag: 322.



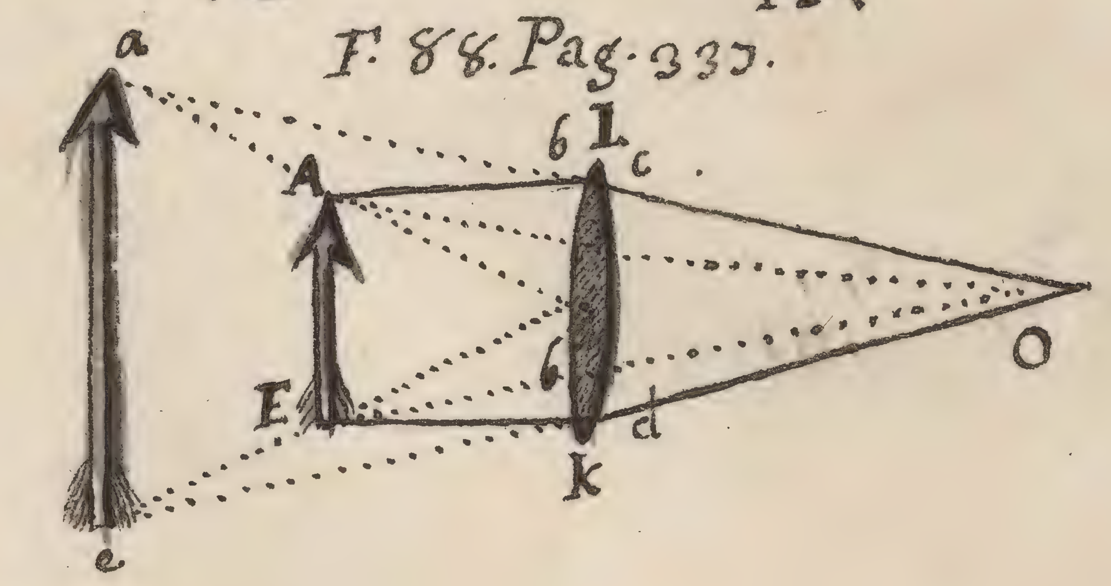
F. 90. Pag. 338.



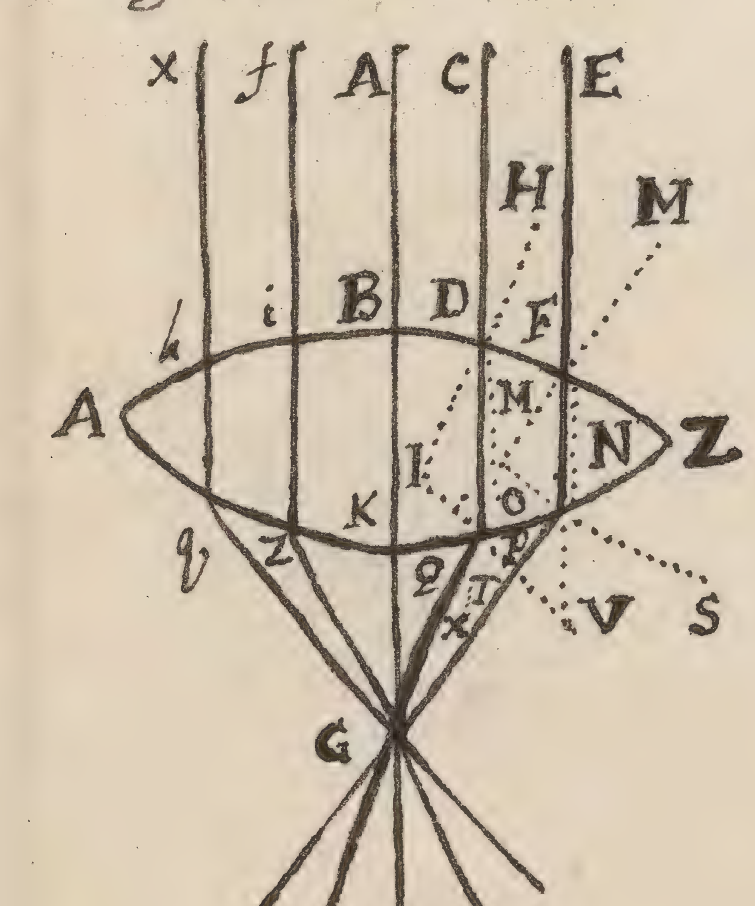
F. 89. Pag: 337.



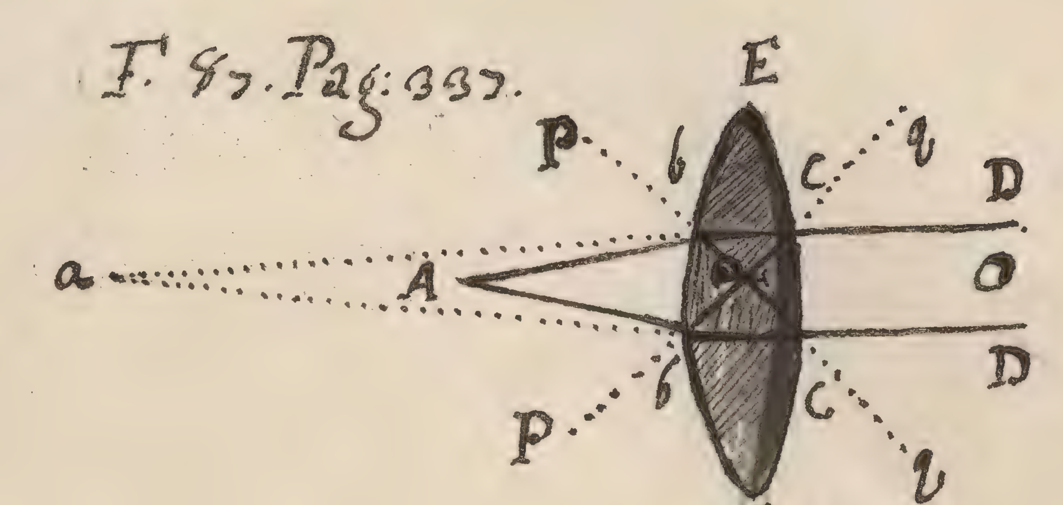
F. 88. Pag. 337.



F. 86. Pag: 335.



F. 87. Pag: 337.

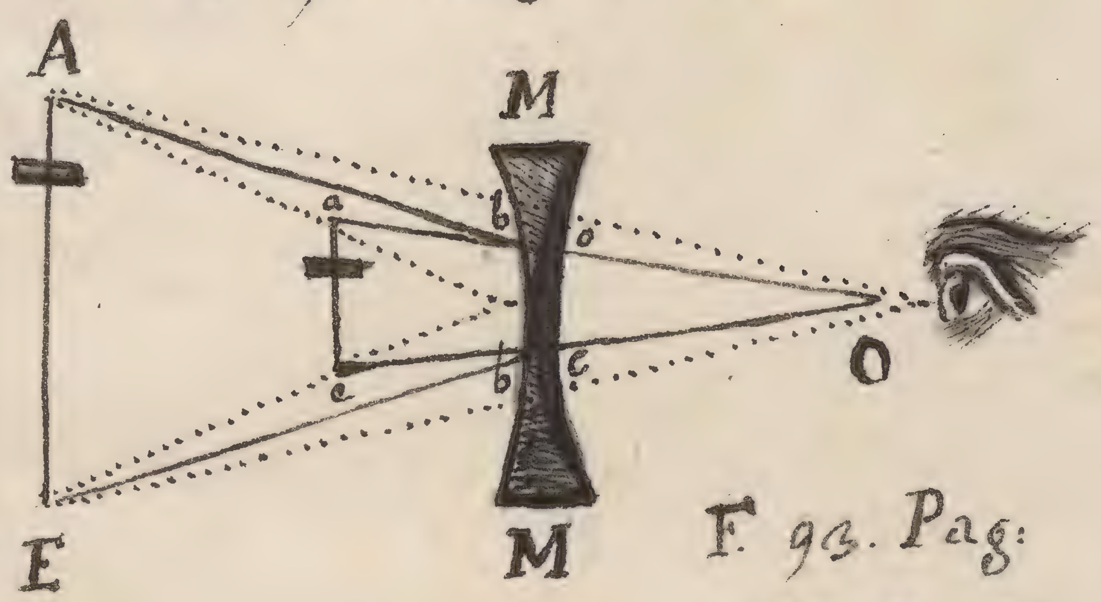


Tab: IX.

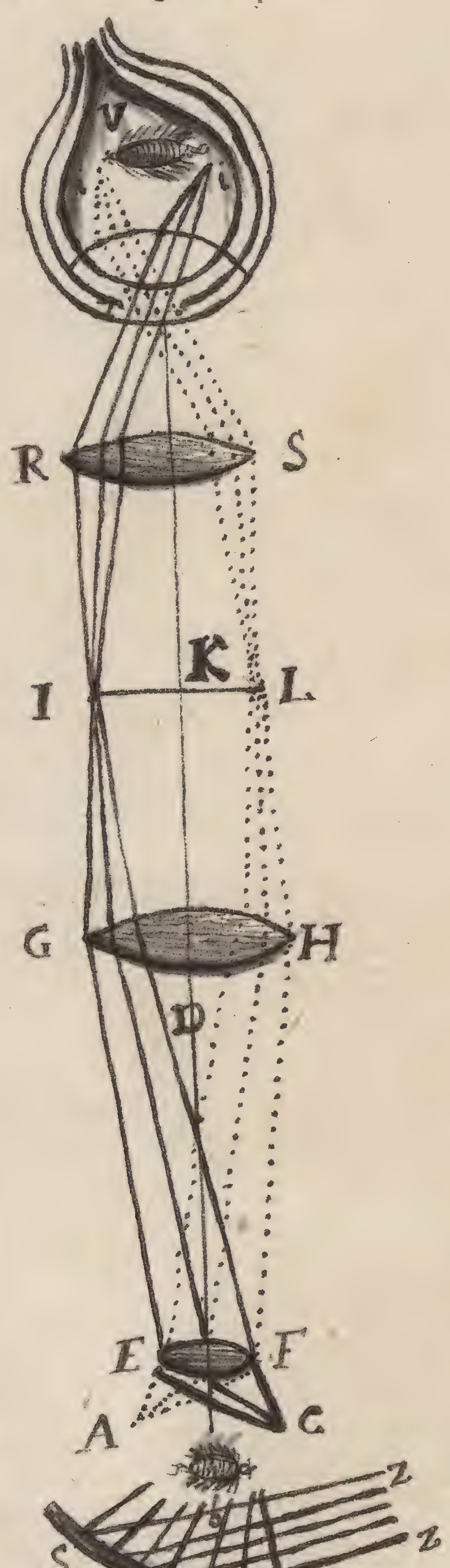
Tab. 9.

Tab. IX

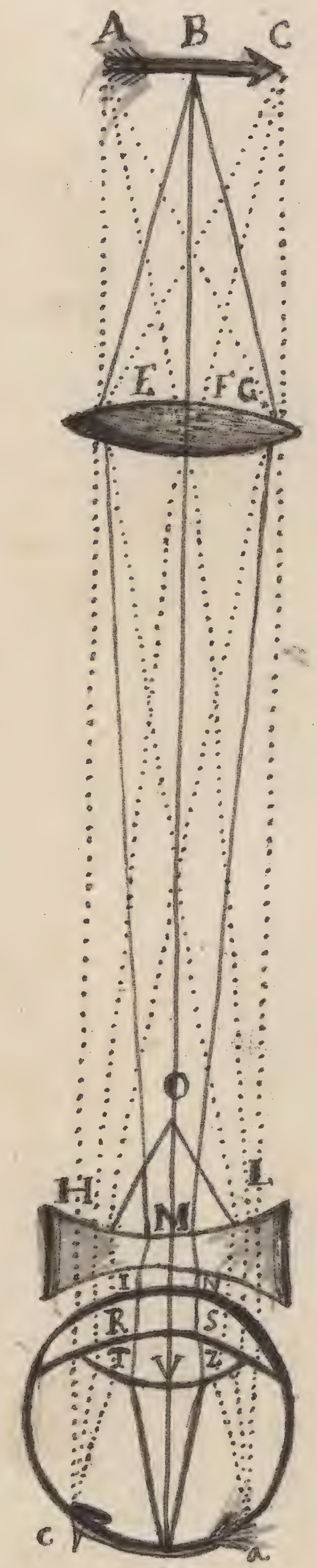
F. 91. Pag: 338.



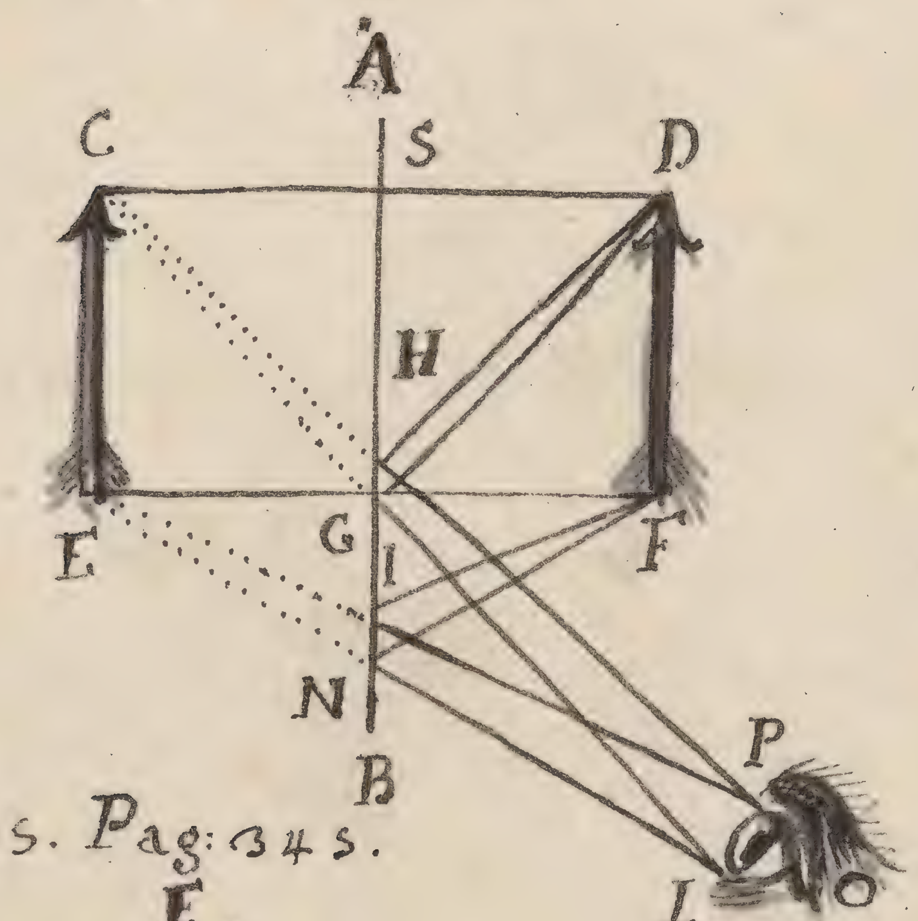
F. 92. Pag: 339.



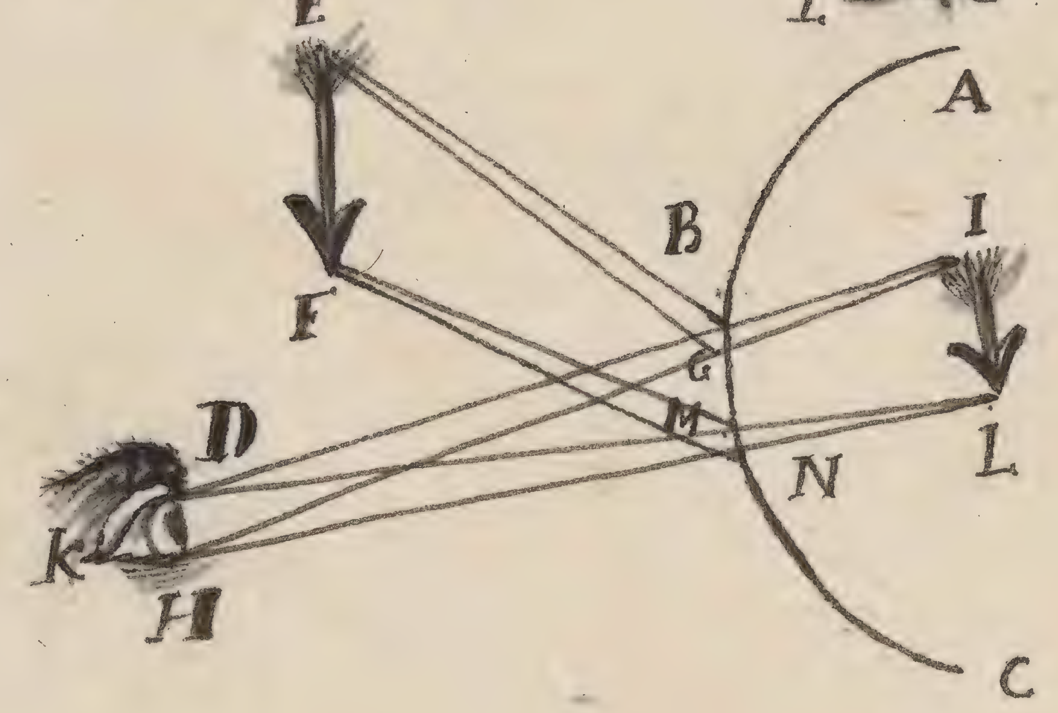
F. 93. Pag:



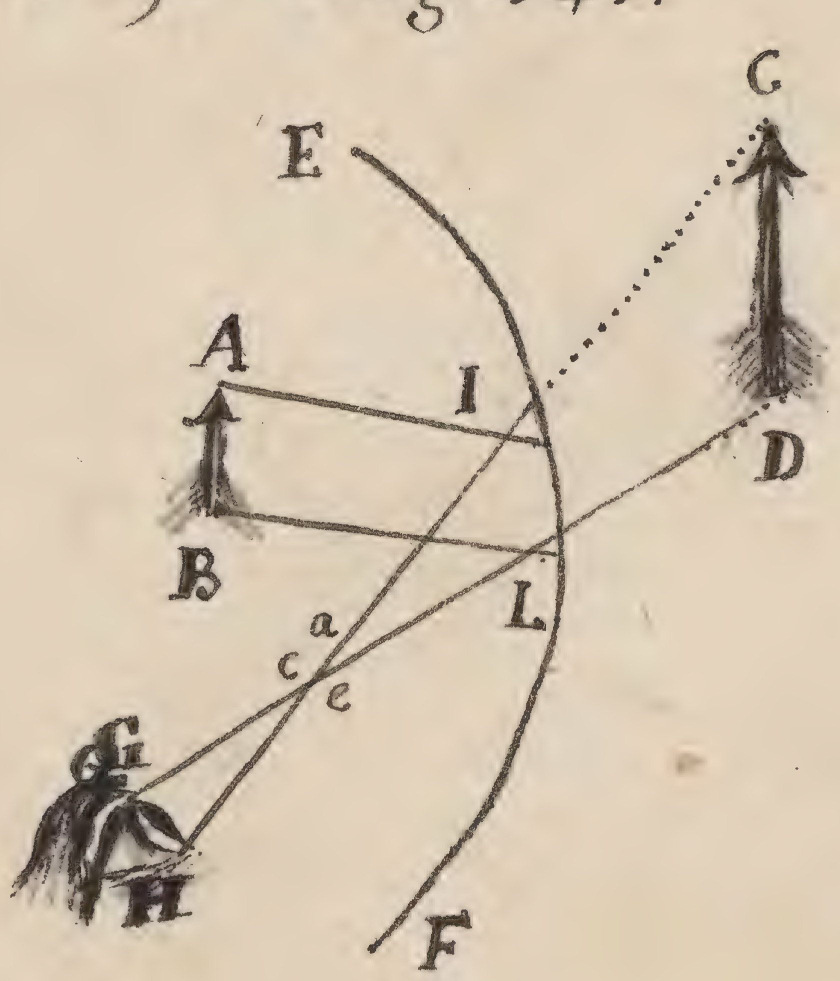
F. 94. Pag: 343.



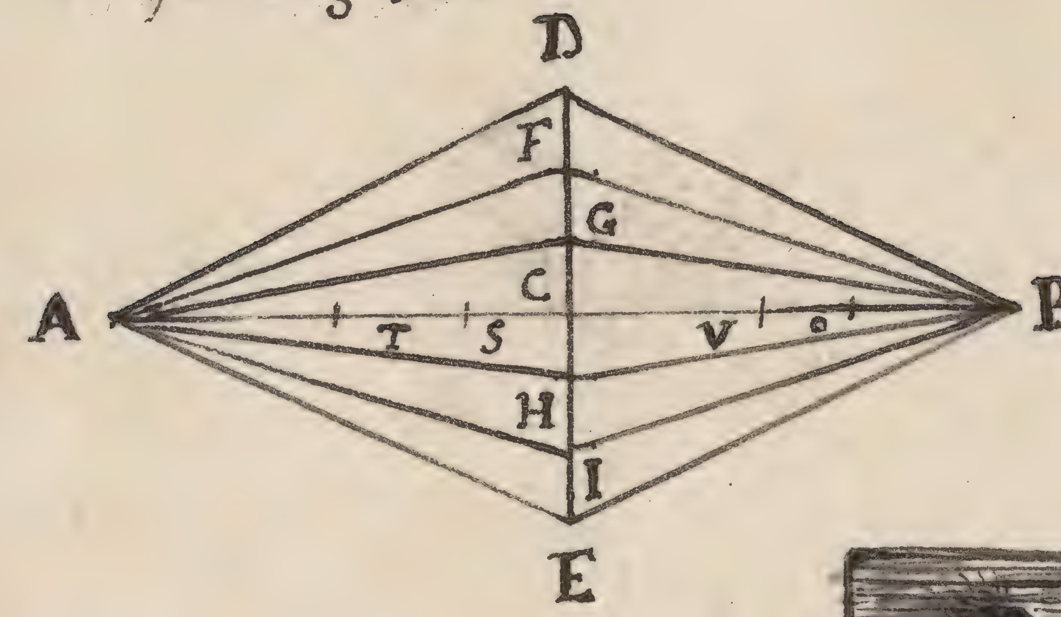
F. 95. Pag: 345.



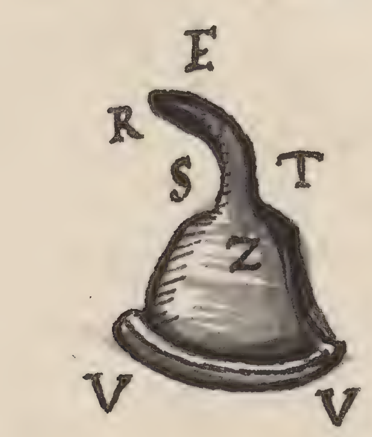
F. 96. Pag: 347.



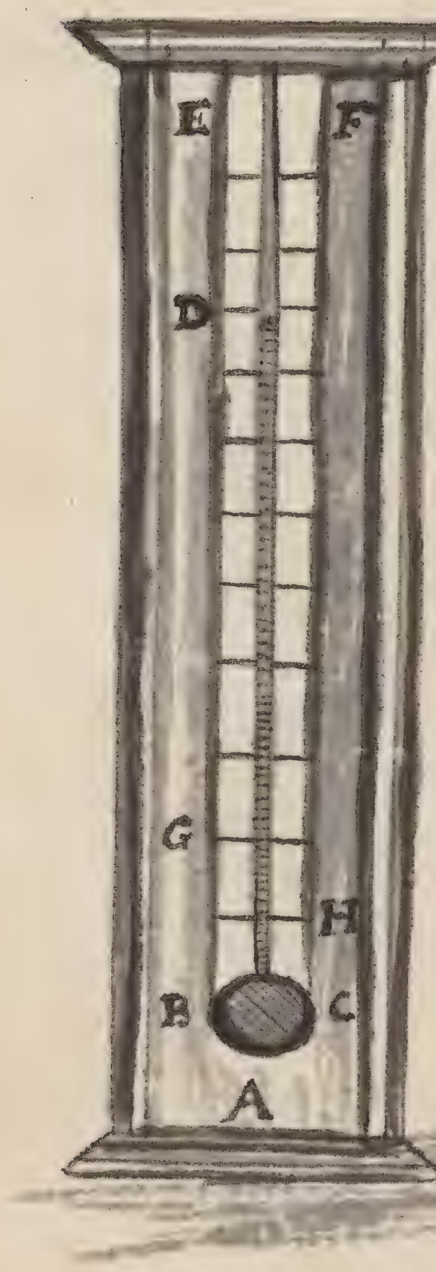
F. 97. Pag: 350.



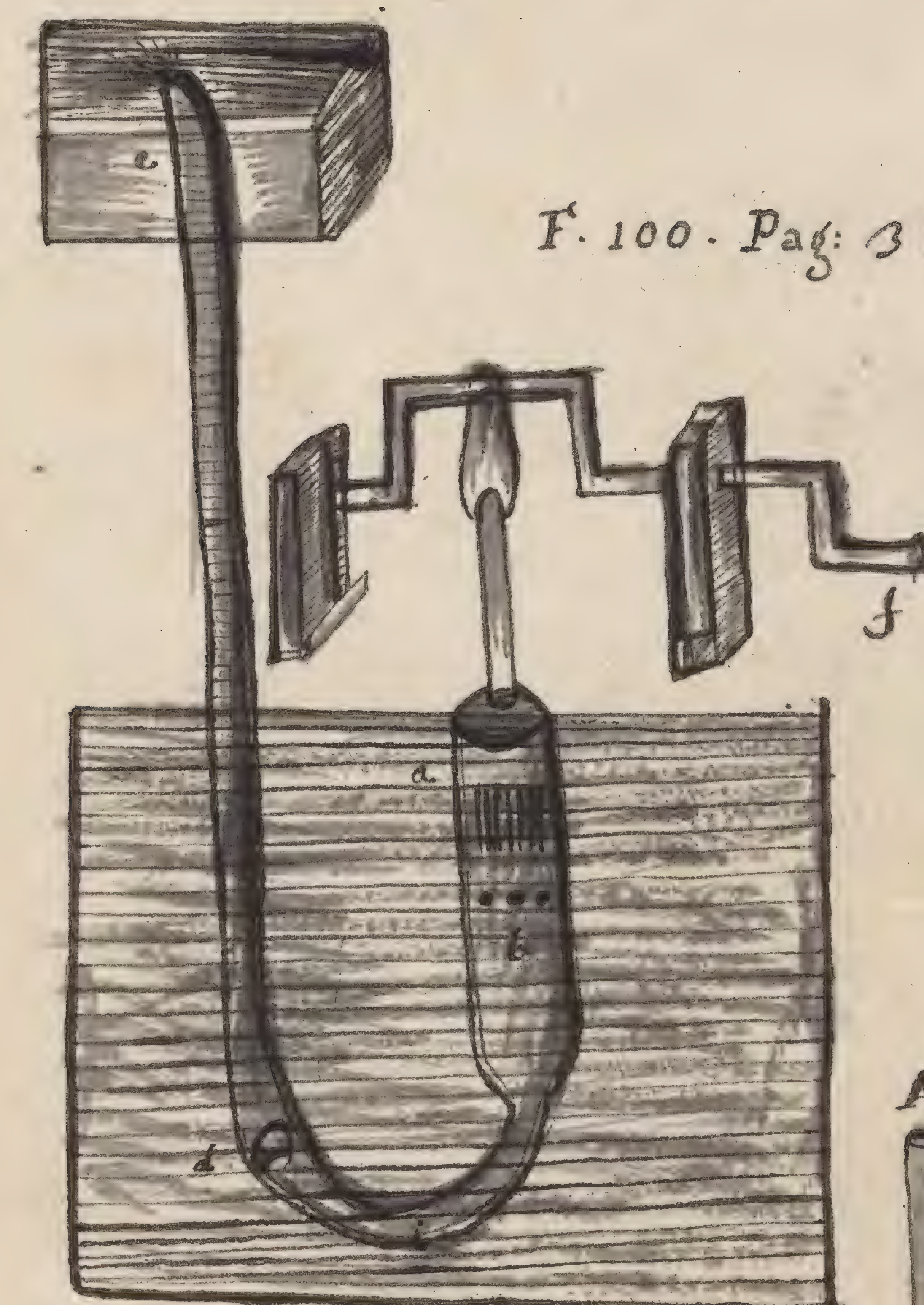
F. 98. Pag: 352.



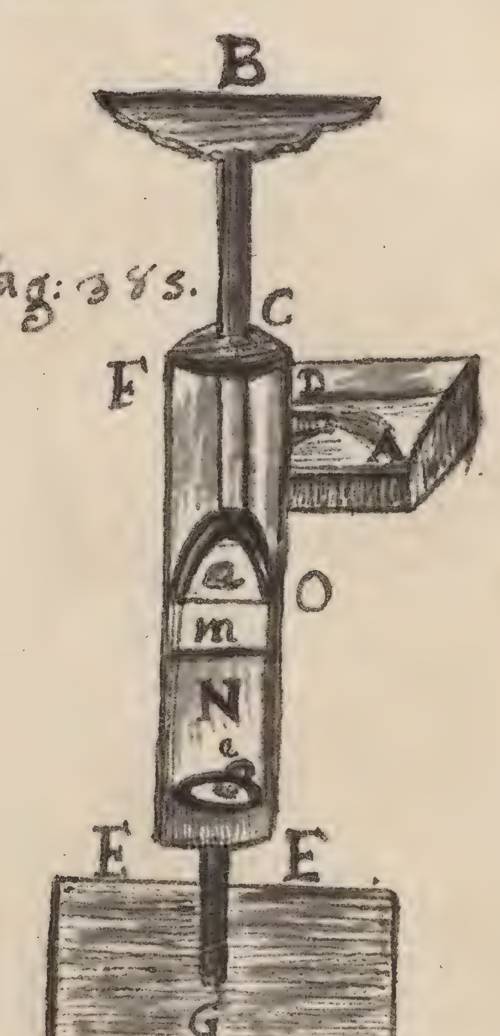
F. 99. Pag: 364.



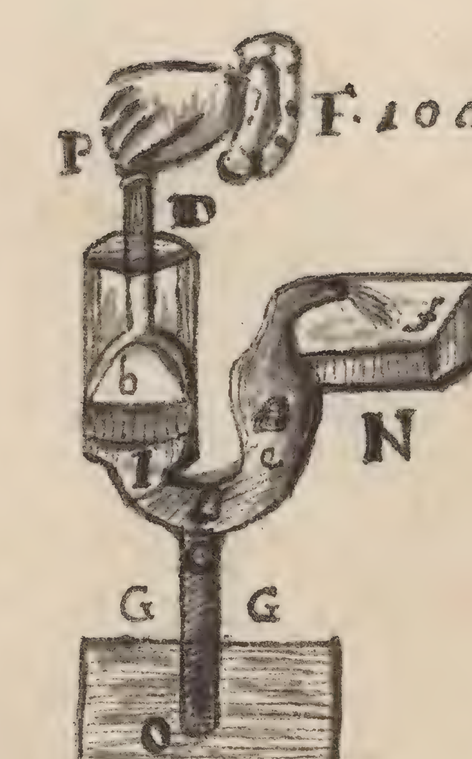
F. 100. Pag: 384.



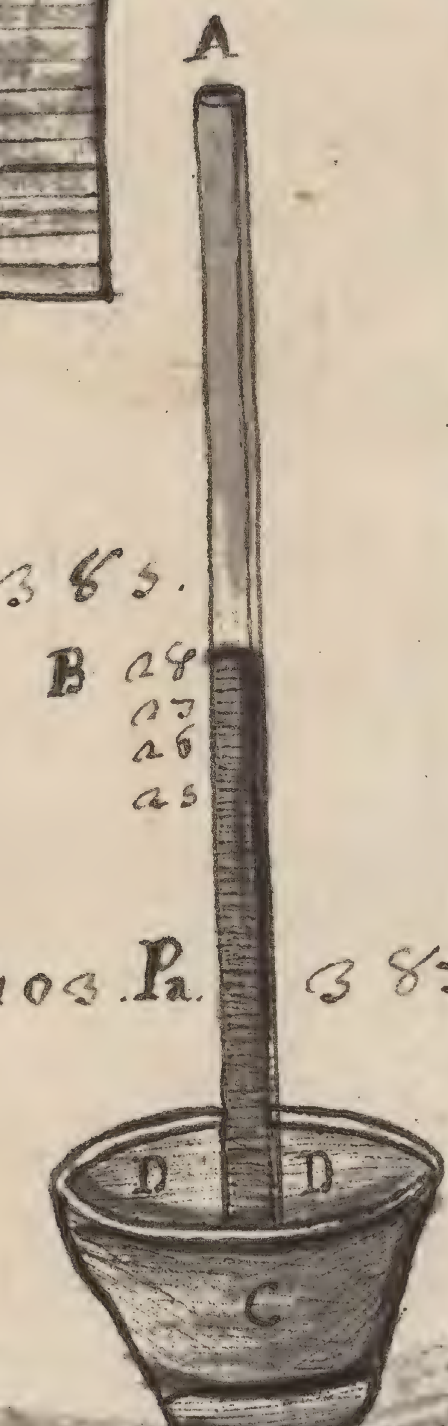
F. 101. Pag: 385.



F. 102. Pag: 385.



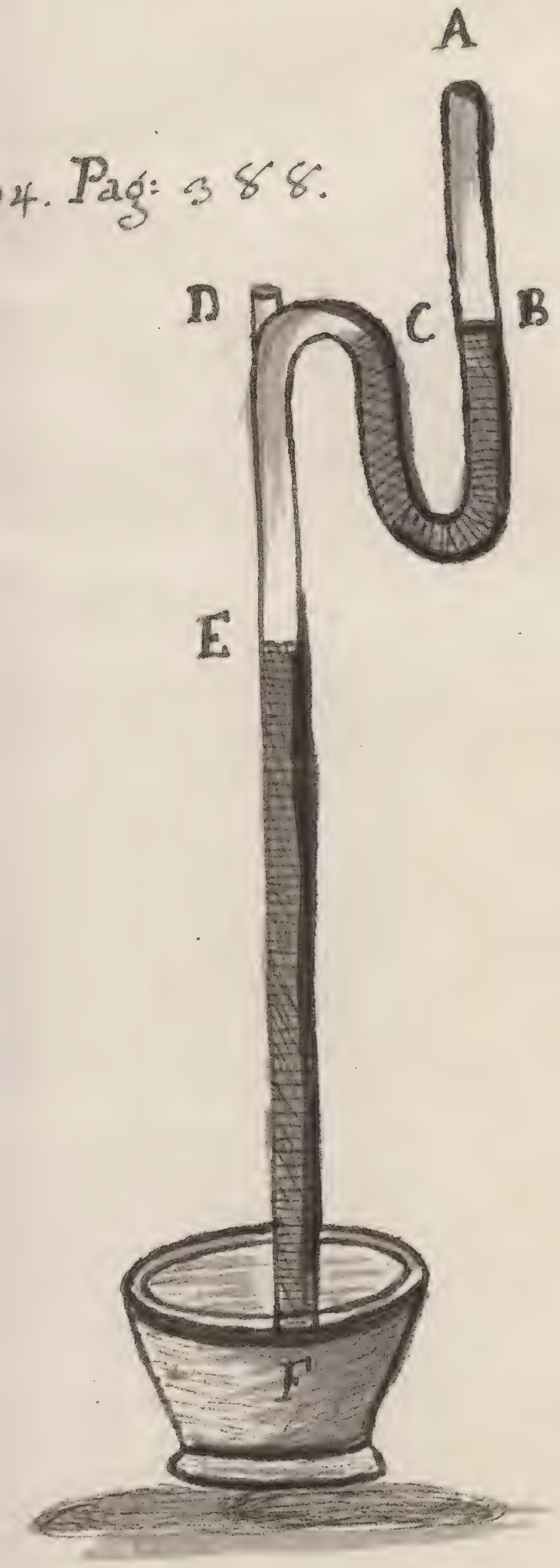
F. 103. Pa. 387.



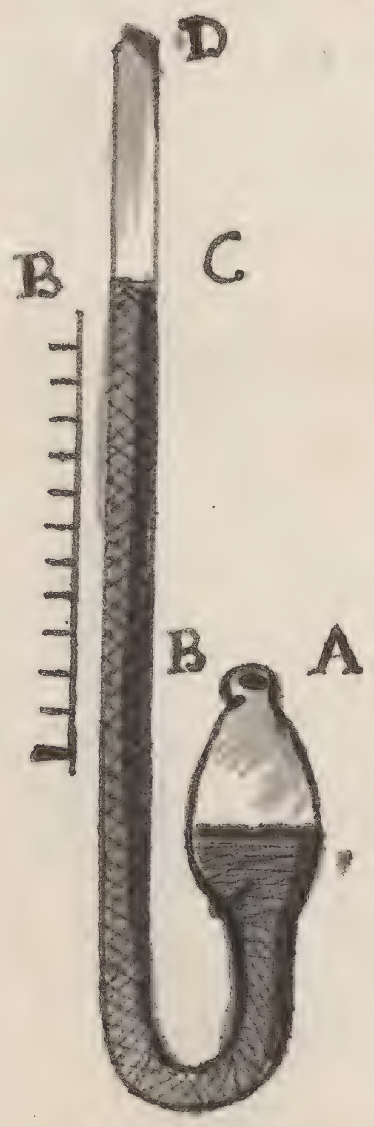
Tab: X.

Tab. 10.

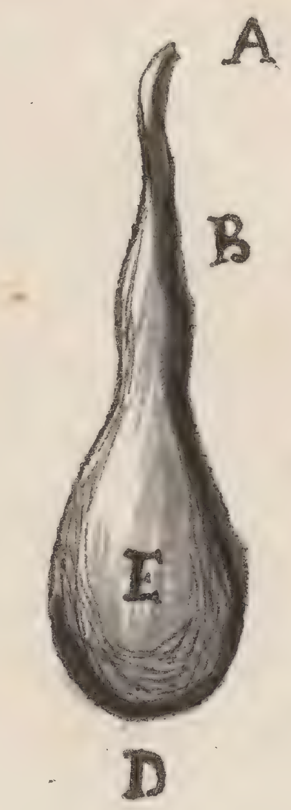
F.104. Pag: 388.



F.105. Pag: 389.



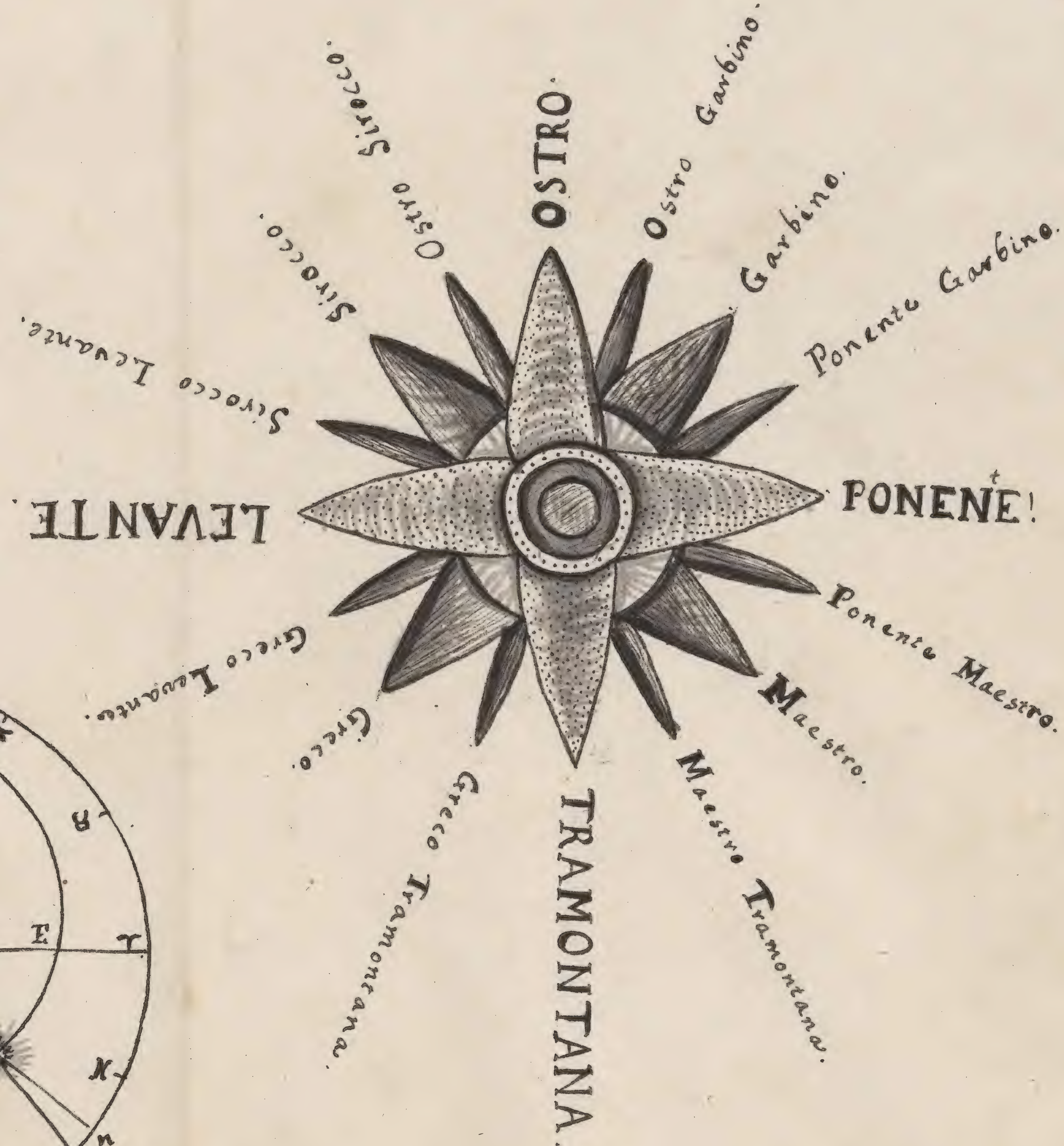
F.106. Pag: 393.



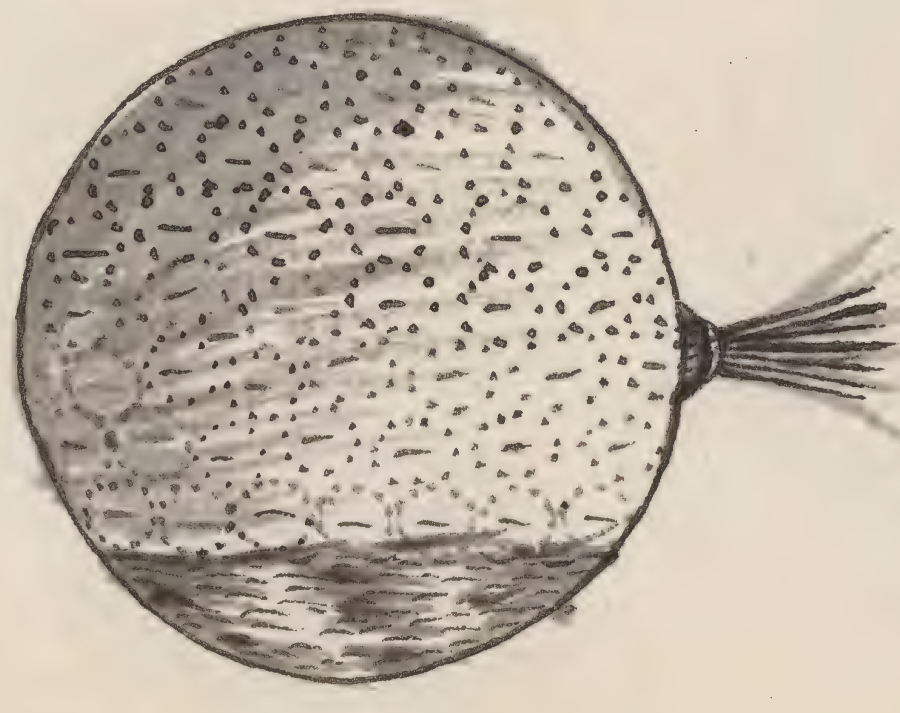
F.107. Pag: 392.



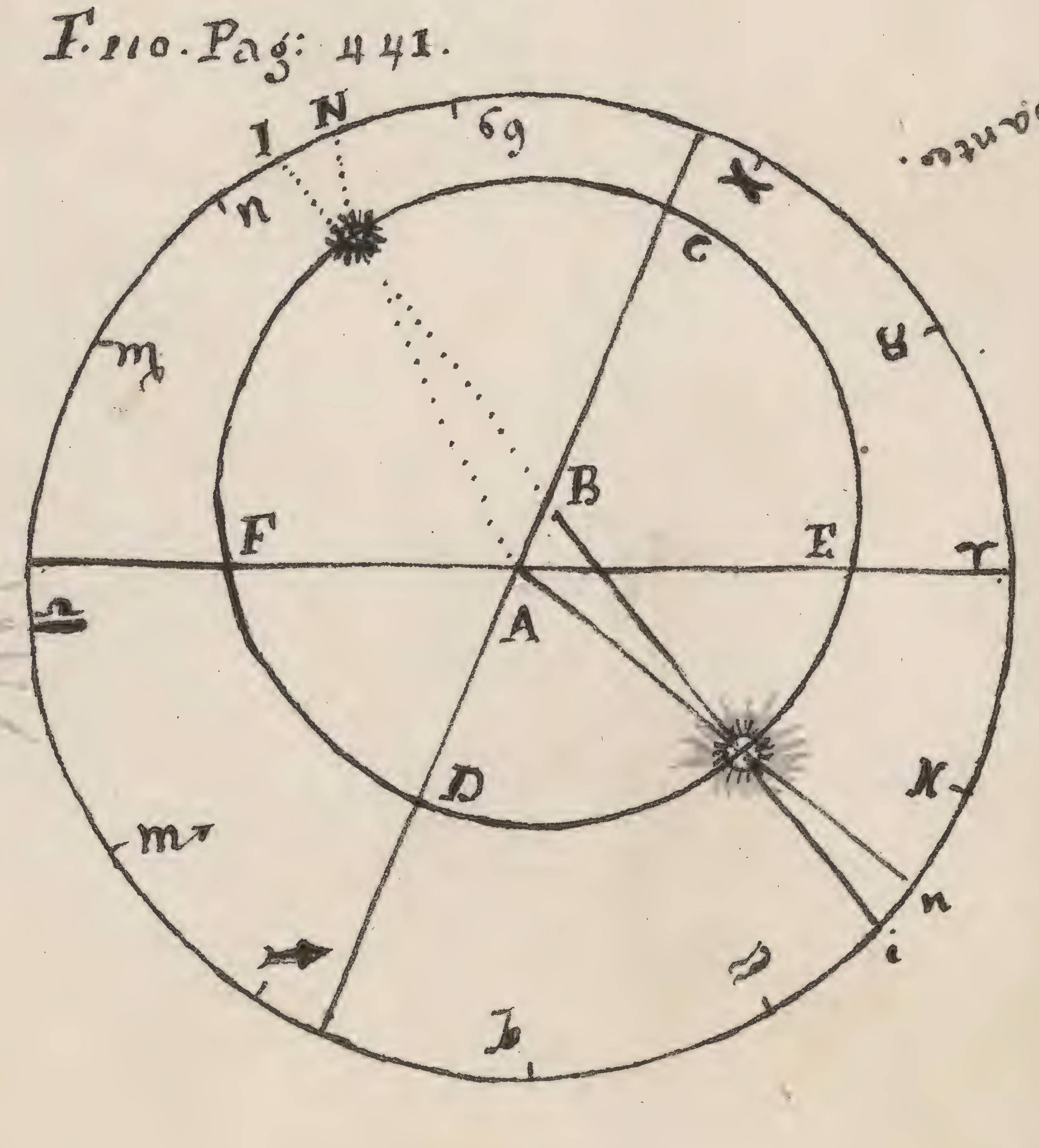
F.108. Pag: 406.



F.109. Pag: 405.



F.110. Pag: 441.



Tab: XI.

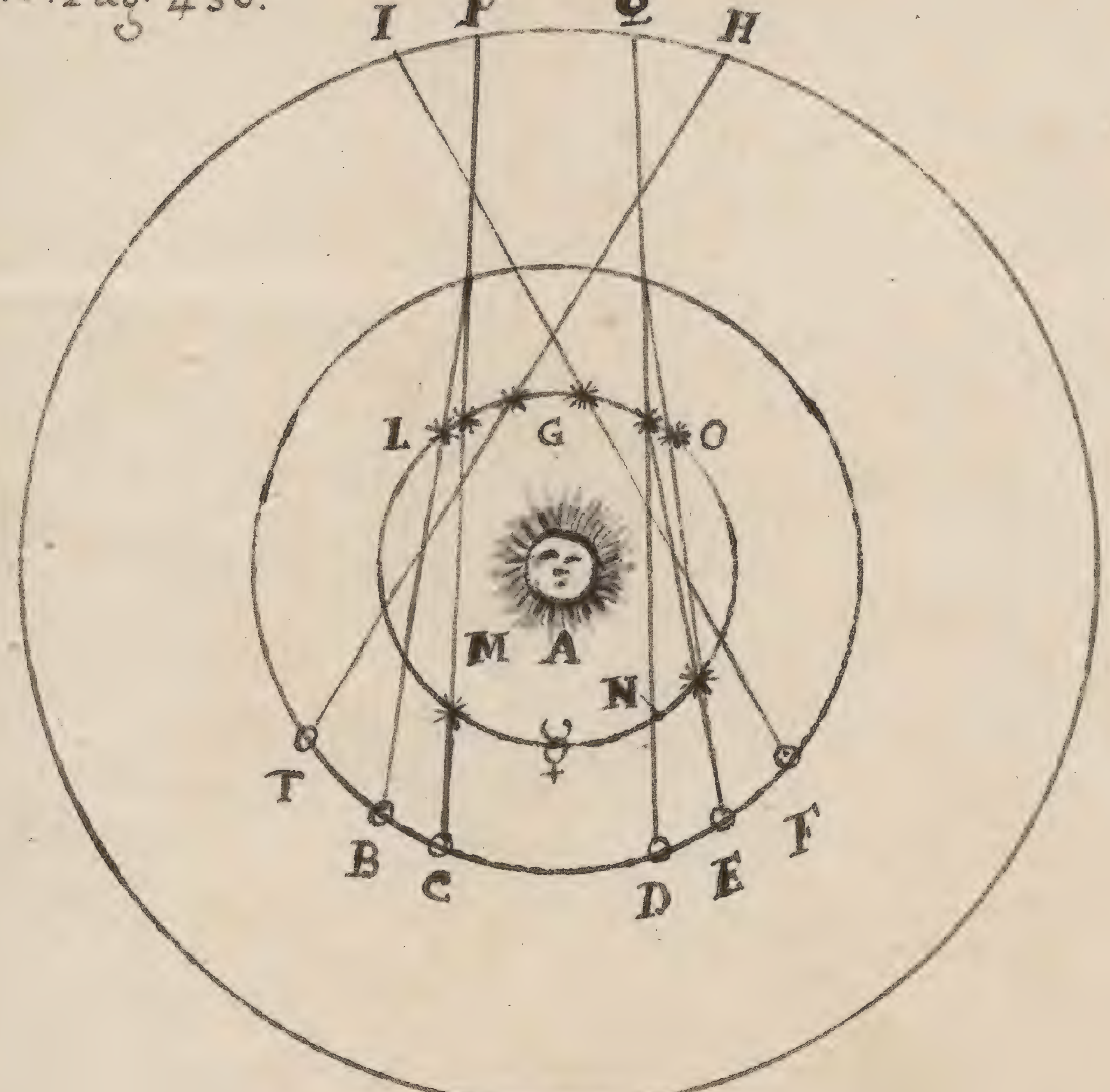
Tab. 11. F. 111. Pag: 439.



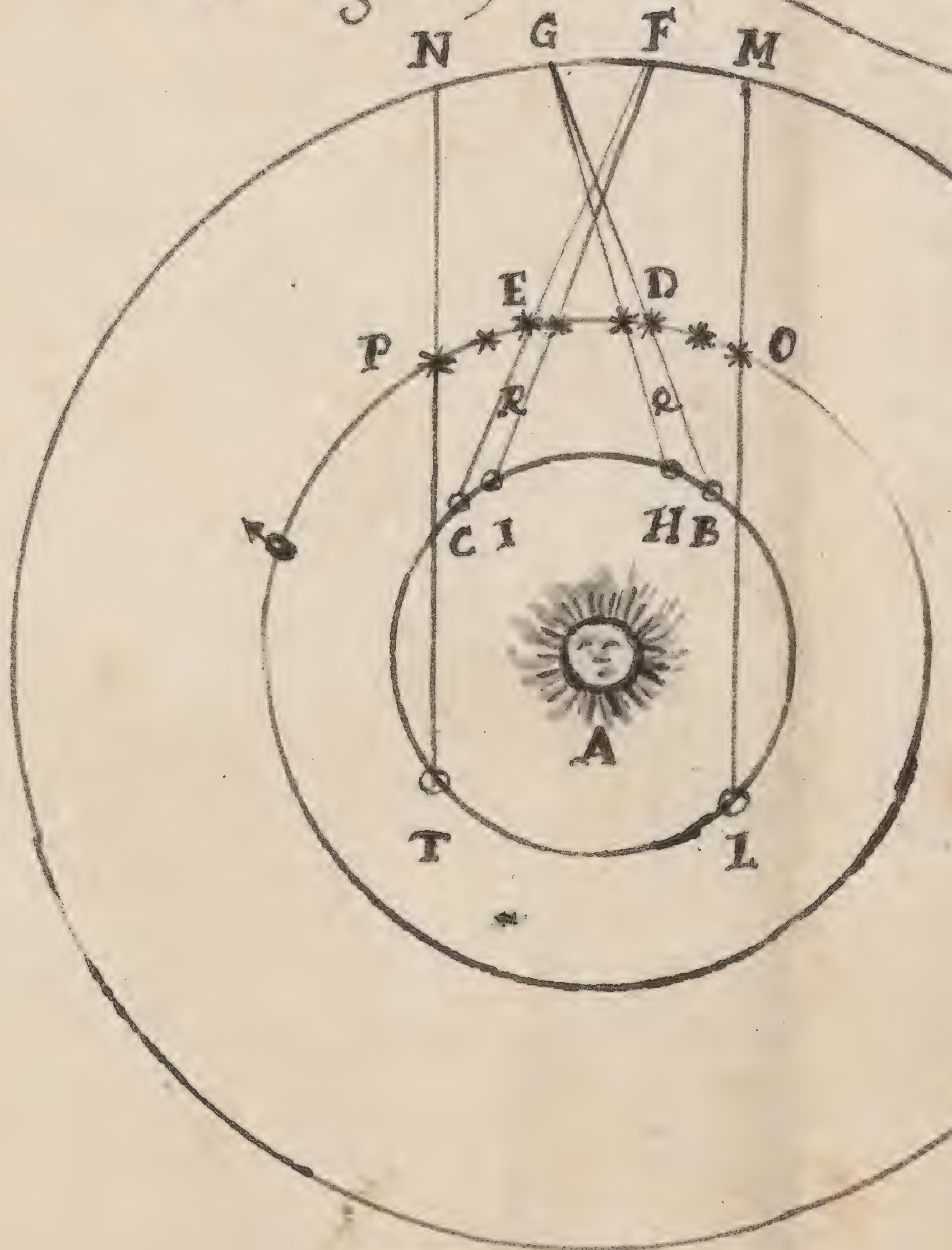
F. 113. Pag: 446.



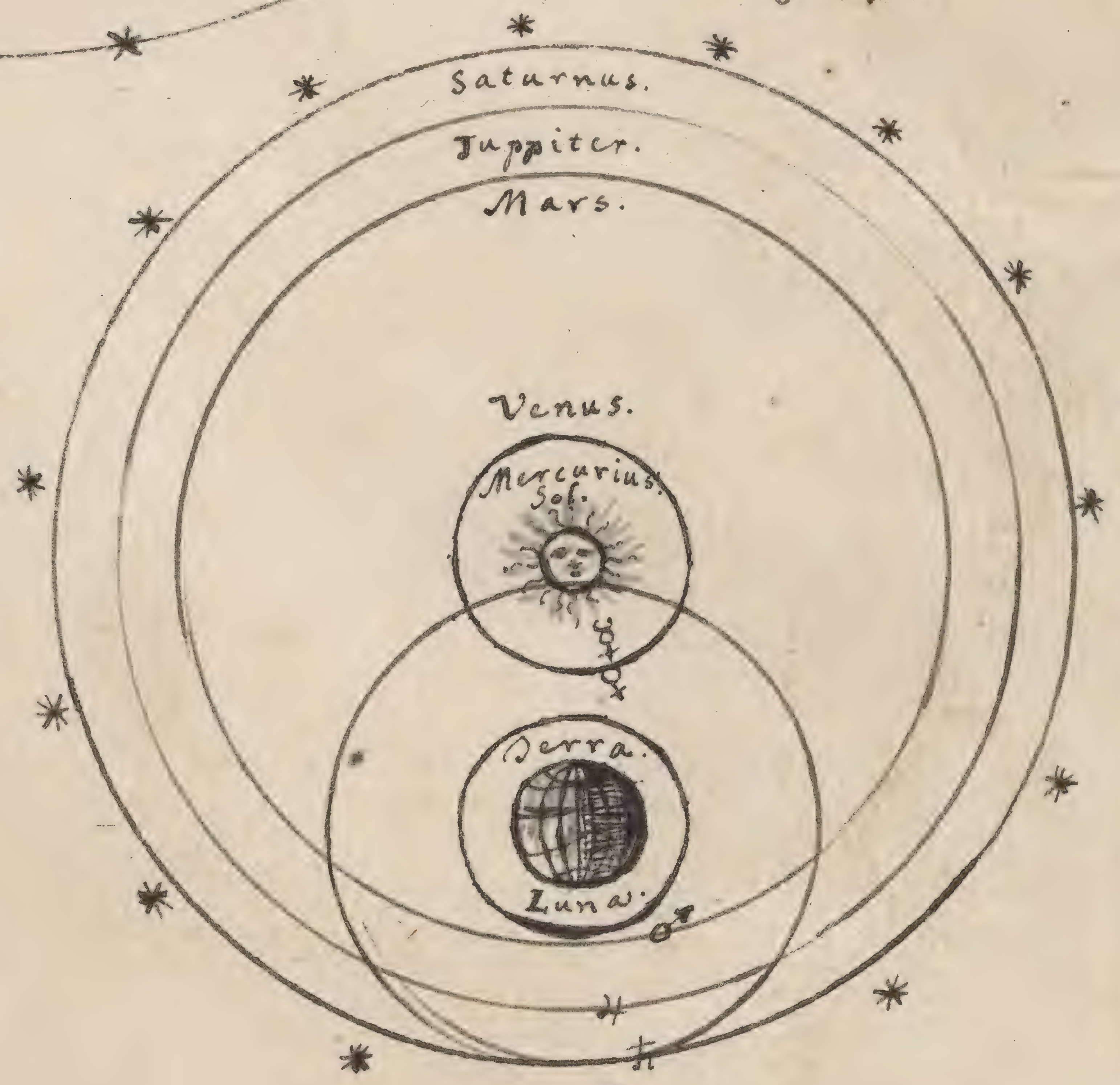
F. 115. Pag: 450.



F. 114. Pag: 449.

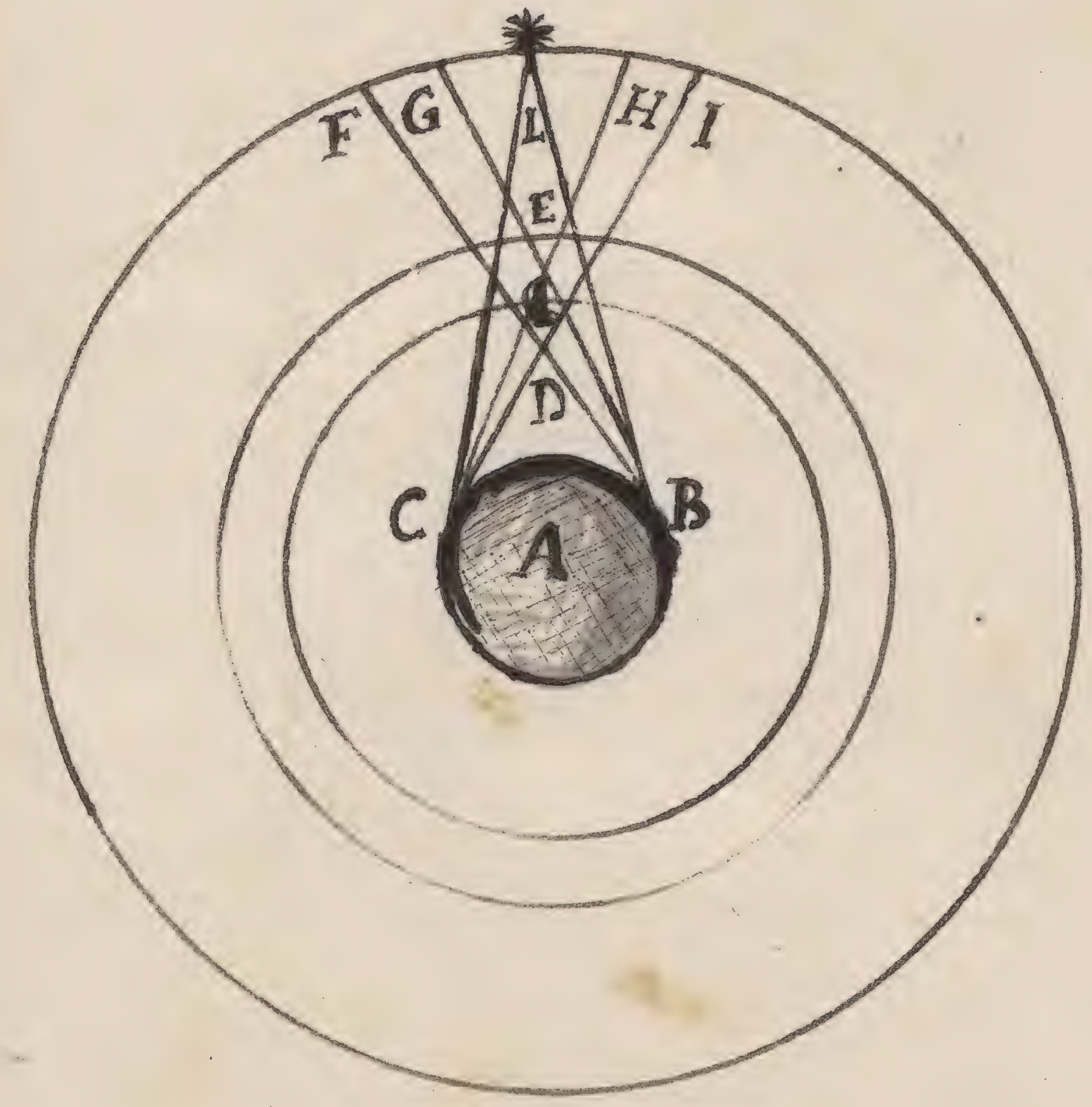


F. 112. Pag: 442.



Tab: XII.

Tab. 12. F. 117. Pag: 469.



F. 118. Pag: 470.

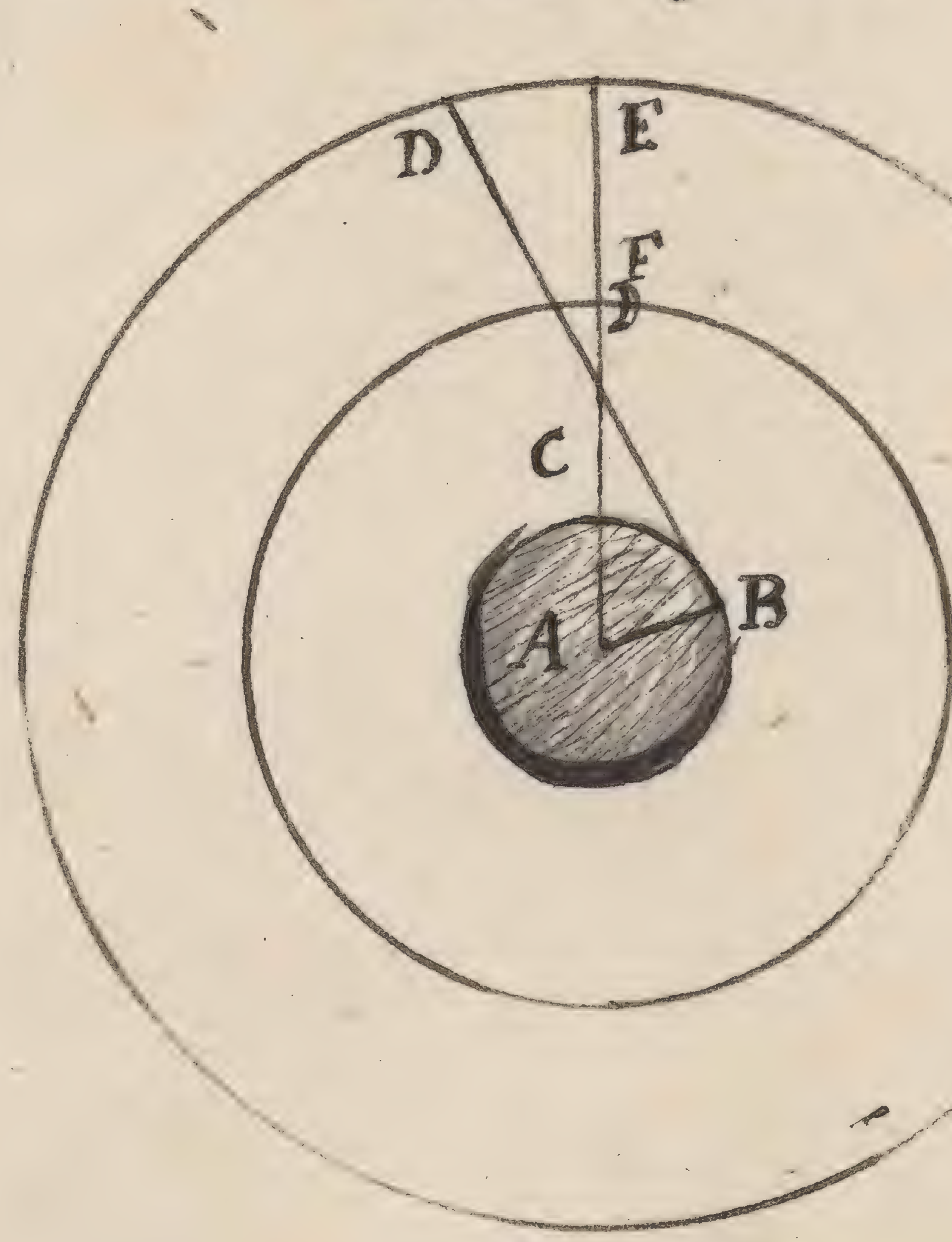
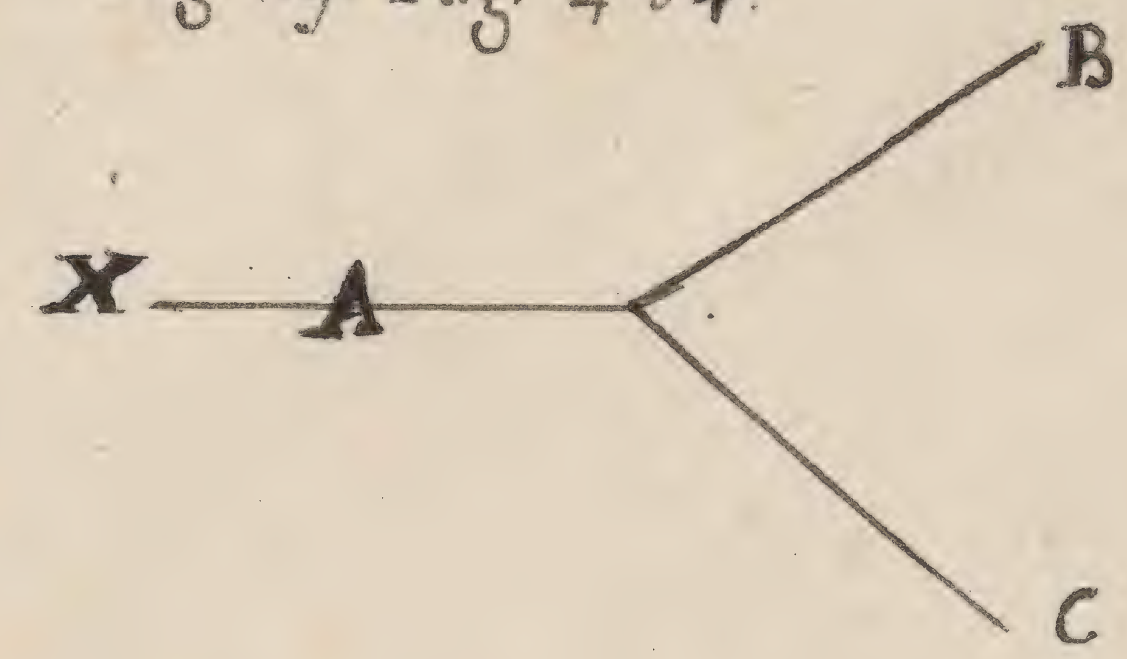


Fig. 119. Pag: 484.



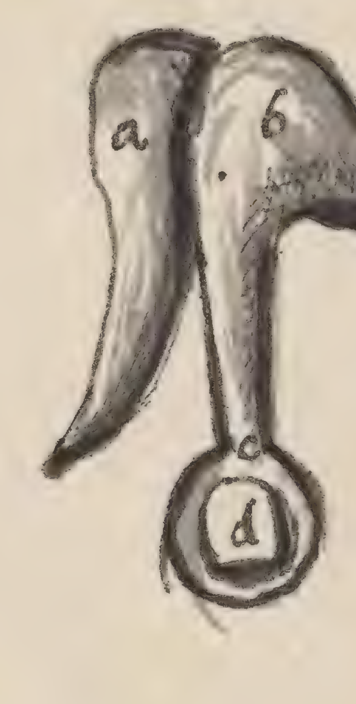
F. 116. Pag: 468.



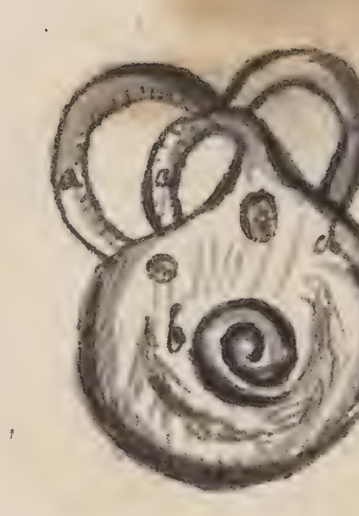
F. 120. Pag: 501.



F. 121. Pag: 502.



F. 122. Pag: 503.



Finis.
coronat opus ~

Ad Laudem Dei, Beatiſsimæ Virginis
Mariæ sub titulo Sapientiæ, nec
non Divi Josephi a Leoniſsa.

R